Cours et exercice sur les équations différentielles

Guesmi.B

Rappel

Soit α un réel l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y'-αy=0

Est l'ensemble des fonctions f définies sur IR par $f(x) = \lambda e^{\alpha x}$;λϵIR

EXERCICE1

Déterminer la solution de

1)-2y'+y=0⇔ y'-(1/2)y=0 d'après ce qui précède α= ½

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $f(x) = \lambda e^{\frac{1}{2}x}$

2)y+4y'=0

L'ensemble des solutions est $f(x) = \lambda e^{\frac{1}{4}x}$

3) Rappel

L'équation différentielle y'-αy=0 admet une unique solution qui prend la valeur y_0 en x_0 est la fonction f définie sur IR par $f(x) = y_0 e^{\alpha(x-x_0)}$

Exemple

Déterminer la solution de l'équation différentielle y'-5y=0 qui prend -1 en ½

D'après ce qui précède on a : α=5 ; x_0=1/2 et y_0=-1

Donc $f(x) = -e^{5(x-\frac{1}{2})}$

4)soit la fonction definie sur IR par $f(x) = 2e^{-2x+4}$

a)déterminer une équation différentielle du type y'-αy=0 (1) dont f est une solution

ona : $f^{'}(x) = -4e^{-2x+4}$ et on a : f est une solution de (1) ⇔ f'(x)-αf(x)=0

on trouve alors α=-2

d'où l'équation différentielle est y'+2y=0

(si vous voulez vérifier vous remplacer y par f(x))

b)donner une condition initiale vérifiée par f

reponse

on sait que si $y_0=f(x_0)$ alors $f(x)=y_0 e^{\alpha(x-x_0)}$

or α=-2 donc on trouve $y_0=2$ et $x_0=2$

on sait que si $y_0=f(x_0)$ alors $f(x)=y_0 e^{\alpha(x-x_0)}$

or α=-2 donc on trouve $y_0=2$ et $x_0=2$

EXERCICE2

La solution générale de l'équation y'-αy=u(x)   (E)

Est la fonction f définie par $f(x) = f_0(x) + \lambda e^{\propto x}$;λϵIR et f_0 est une solution particulière de (E)

Résoudre les équations différentielles

1)$y' + y = x^2 + 3x - 1$ (1)

2)$y' - 4y = -5cos3x - 10sin3x$ (2)

3)$y' - 3y = 2e^{2x}$ (3)

CORRECTION

1)on cherche une solution particulière f_0 de la forme $f_0(x)=ax^2+bx+c$

donc $f'_0(x)=2ax+b$; f_0 doit vérifier (1) donc

$ax^2+(2a+b)x+(b+c)=x^2+3x-1$

par identification on trouve a=1 ; b=1 et c=-2

donc $f(x)=x^2+x-2+\lambda e^{-x}$

2) cherchons une solution particulière f_0

De la forme $f_0(x)$=Acos3x+Bsin3x

$f'_0(x)$=-3Asin3x+3Bcos3x

or f_0 doit vérifier (2) donc par identification on trouve A=2 et B=1

alors f(x)=+cos3x+sin3x +λe^{4x}

3)toujours on cherche une solution particulière f0 de la forme $f_0(x)=Ae^{2x}$

$f_0'(x) = 2Ae^{2x}$ donc $f_0'(x) - 3f_0(x) = 2e^{2x}$ donne A=2

Donc $f(x) = -2e^{2x} + \lambda e^{3x}$

Equation différentielle du second ordre

Définition

On appelle équation différentielle homogène (sans second membre) du second ordre à coefficient

Constant toute équation du type ay’’+by’+cy=0 (E) ;a ;b sont reux réels et a un réel non nul

L’qution caractéristique associée à (E) est a r^2+br+c=0 (1)

Δ=b^2-4ac alors (1) admet une solution double $r=\frac{-b}{2a}$

*siΔ=0 l’ensemble des solutions de (E) est l’ensemble des fonctions définies sur IR par

=1 er $fx)=(\alpha x+\beta)e^{rx}$

*si Δ>0 alors (1) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2

Donc (E) admet pour ensemble de solution $f(x)=\alpha e^{r_1 x}+\beta e^{r_2 x}$

A et β sont deux réels

*si Δ<0 alors (1) admet deux solution complexes $r_1=\alpha+i\beta\ et\ r_2=\alpha-i\beta$

Donc (E) admet pour ensemble de solution $f(x)=e^{\alpha x}(Acos\beta x+sin\beta x)$ A et B sont deux réels

EXERCICE2

La solution générale de l’équation y’-αy=u(x) (E)

Est la fonction f définie par $f(x)=f_0(x)+\lambda e^{\propto x}$;λϵIR et f_0 est une solution particulière de (E)

Résoudre

1)y’’+4y’+4y=0 (1)

L’équation caractéristique de (1) est r^2+4r+4=0 ; don cune seule solution r=-2

Donc l’ensemble des solutions est de la forme $f(x)=(\alpha x+\beta)e^{-2x}$

2) y’’+2y’-3y=0 l’équation caractéristique est r^2+2r-3=0 ;Δ>0

Donc deux solutions r_1=1 et r_2=-3

Donc les solutions sont de la formes $f(x)=\alpha e^{x}+\beta e^{-3x}$

3)

Rappels

L'ensemble des solutions de l'équation y ''+ky=0 avec réel positif

Toute fonction définie sur IR par $f(x) = \alpha cos\sqrt{k}x + \beta sin\sqrt{k}x$

Exemple

Resoudre l'équation différentielle y''+16y=0

On k=16

Donc l'ensemble des solutions sont les fonctions definies sur IR par

F(x)=$\alpha cos4x + \beta sin4x$

4) resoudre y''+16=0

L'équation caractéristique est $r^2+16=0$

Deux solutions complexes conjuguées $r_1=4i$ et $r_2=-4i$ donc l'ensemble des solutions est de la forme $f(x) = Acos4x + Bsin4x$