# Qcm

# Nombres complexes

dans les exercices suivants, les nombres complexes sont représentés dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Guesmi.B

E1

**x est un réel quelconque ; soient :** $Z_1 = 1 - i$ , $Z_2 = 1 + i$ , $Z_3 = \cos(x) + i \times \sin(x)$ **; enfin :** $Z = Z_1 \times Z_2 \times Z_3$

A

- [ ] La forme trigonométrique de $Z_1$ est $\sqrt{2} \times \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

B

- [ ] La forme trigonométrique de $Z_1$ est $\sqrt{2} \times \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$

C

- [ ] La forme trigonométrique de $Z_1$ est $\sqrt{2} \times \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \times \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$

D

- [ ] $\arg(Z_3) = x\,[\pi]$

E

- [ ] $|Z_3| = 1$

corrigé C1

*Vous avez coché les cases: -*

*Il fallait cocher les cases: -C-E-*

$|Z_1| = |1-i| = \sqrt{2}$ ; de même $|Z_2| = |1+i| = \sqrt{2}$ .

$\arg(Z_1) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ $\arg(Z_2) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ enfin $\arg(Z_3) = x[2\pi]$ et $|Z_3| = 1$.

A- Ceci n'est pas une forme trigonométrique

B- Même chose

C- Au vu des calculs, C est juste

D- Faux, un argument est toujours défini modulo $2\pi$

E- Vrai. On pourrait écrire $Z_3 = e^{ix}$

E 2 **Suite de l'énoncé 1 : x est un réel quelconque ; soient : : $Z_1 = 1-$ $Z_2 = 1+i$ , $Z_3 = \cos(x) + i \times \sin(x)$ ; enfin : $Z = Z_1 \times Z_2 \times Z_3$**

- A ☐ $\arg(Z) = -x[2\pi]$
- B ☐ Z est un réel $\Leftrightarrow x = 0(\pi)$
- C ☐ $\arg(Z) = \arg(Z_1) \times \arg(Z_2) \times \arg(Z_3)[2\pi]$
- D ☐ $|Z| \leq |Z_1|^3$
- E ☐ $\arg(Z) = x(\pi)$

corrigé C2

*Vous avez coché les cases: -*

*Il fallait cocher les cases: -B-D-*

A- $\arg(Z)=\arg(Z_1)+\arg(Z_2)+\arg(Z_3)[2\pi]$ $\arg(Z)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+x[2\pi]$ et

A est fausse

B- Puisque $\arg(Z)=x[2\pi]$, on sait que Z est un réel si et seulement si son argument est égal à zéro modulo $\pi$ ; B est juste

C- $\arg(Z)=\arg(Z_1)+\arg(Z_2)+\arg(Z_3)[2\pi]$, C est fausse

D- Enfin $|Z|=2$ et $|Z_1|^3=2\sqrt{2}$ donc D est vraie

E- Faux, car l'argument est défini modulo $2\pi$

| E3 | Soit Z un complexe non nul |
|---|---|
| A | $\frac{1}{Z}=\frac{\overline{Z}}{\lvert Z\rvert^2}$ |
| B | $\lvert Z\rvert=1\Rightarrow\overline{Z}=\frac{1}{Z}$ |
| C | $\lvert Z\rvert\leq\lvert\mathrm{Re}(Z)\rvert$ |
| D | $\forall Z_2\in\mathbb{C},\exists Z_1\in\mathbb{C}/\lvert Z_1+Z_2\rvert=\lvert Z_1\rvert+\lvert Z_2\rvert$ |
| E | $Z\times\overline{Z}\in\mathbb{R}^+$ |

corrigé C3

*Vous avez coché les cases: -*

*Il fallait cocher les cases: -A-B-E-*

A- $|Z|^2 = Z\times\overline{Z} = \mathrm{Re}(Z)^2 + \mathrm{Im}(Z)^2$ donc A est juste car $Z \neq 0$

B- Egalement vrai, il y a même équivalence

C- D'après la définition du module c'est $|Z| \geq |\mathrm{Re}(Z)|$ ; Faux

D- Inégalité triangulaire, donc D est faux

E- Bien sûr car $Z\times\overline{Z} = |Z|^2 \geq 0$ , Juste

E 4 Soient : $a = 2+2i\sqrt{3}$ , $b = 2-2i\sqrt{3}$ , $c = -1+i\sqrt{3}$ et soient A, les points d'affixes respectives a,b,c

A ☐ $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) = \arg\left(\dfrac{a-c}{b-c}\right)[2\pi]$

B ☐ $\dfrac{a-c}{b-c} = -i\sqrt{3}$

C ☐ $(CA)\perp(CB)$

D ☐ $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

E ☐ ABC est rectangle en C car $AB^2 = AC^2 + BC^2$

corrigé C4

*Vous avez coché les cases: -*

*Il fallait cocher les cases: -C-E-*

---

A- $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\vec{u},\overrightarrow{CB}\right)-\left(\vec{u},\overrightarrow{CA}\right)=\arg(c-b)-\arg(c-a)=\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)(2\pi)$

donc A est faux

B- $\frac{a-c}{b-c}=\frac{2+2i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}}{2-2i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}}=\frac{3+i\sqrt{3}}{3-3i\sqrt{3}}=\frac{3+i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}(3+i\sqrt{3})}=\frac{i}{\sqrt{3}}$ donc B est faux

C- en prenant l'argument on déduit que :

$\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)=\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{i}\right)=-\arg(i)=-\frac{\pi}{2}(2\pi)$ . C est juste

D- Par contre D est fausse.

E- Enfin $\overrightarrow{AB}\left(-4i\sqrt{3}\right)$ $\overrightarrow{AC}\left(-3-i\sqrt{3}\right)$ $\overrightarrow{BC}\left(-3-i\sqrt{3}\right)$ ; donc $AB^2=48$

et $AC^2=9+3=12$ et $BC^2=9+27=36$ donc on a bien $AB^2=AC^2+BC^2$ et la réciproque de Pythagore permet de conclure que E est juste. Tout ceci est pratiquement du cours qu'il faut savoir faire et retrouver rapidement.

E5

Soient $\Omega$ ,M,M' d'affixes respectives $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, z, z' tels que $z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+i$

- A ☐ L'équation z'=z n'admet pas de solutions.
- B ☐ $\Omega M'=2\Omega M$
- C ☐ $\Omega M'=\Omega M$
- D ☐ $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\frac{\pi}{6}(2\pi)$
- E ☐ $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\frac{\pi}{3}(2\pi)$

corrigé C5

*Vous avez coché les cases: -*

*Il fallait cocher les cases: -A-B-D-*

---

A- z'=z équivaut $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+i \Leftrightarrow -i=i\sqrt{3}z \Leftrightarrow z=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. La réponse à la question est évidente car il s'agit d'une équation du 1° degré à une inconnue qui admet toujours une solution. Appelons $\omega$ cette solution. $\omega=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. A est juste

B- On a donc $(z'-\omega)=\left(1+i\sqrt{3}\right)\times(z-\omega)$On prend le module , on a une interprétation géométrique en termes de distances :
$|z'-\omega|=\left|1+i\sqrt{3}\right|\times|z-\omega|$ et donc $\Omega M' = 2\Omega M$ ; B est juste

C- C est faux au vu de ce qui précède

D- Enfin $\arg(z'-\omega)=\arg\left(1+i\sqrt{3}\right)+\arg(z-\omega)[2\pi]$ soit
$\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\left(\vec{u},\overrightarrow{\Omega M'}\right)-\left(\vec{u},\overrightarrow{\Omega M}\right)=\arg(1+i\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}[2\pi]$. D juste

E- E est faux.

E6 Soit la suite de complexes $(z_k)$ où $z_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ où k est un entier quelconque positif ou nul et n est un entier positif supérieur à 2 fixé. Enfin $M_k$ est l'image de $z_k$

- A ☐ $\forall k>0,\left(z_k\right)^n=1$
- B ☐ $\forall k>0,\overline{z_k}^n=1$
- C ☐ $z_0+z_1+z_2+\ldots..+z_{n-1}=0$
- D ☐ $\forall k, n-1\geq k\geq 0 \Rightarrow \overline{z_k}=z_{n-k}$
- E ☐ $M_kM_{k+1}=2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

<u>corrigé  C6</u>

*Vous avez coché les cases: -*

*Il fallait cocher les cases: -A-B-C-D-E-*

A- $\forall k>0,(z_k)^n=\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n=e^{2ik\pi}=\left(e^{2i\pi}\right)^k=1$

B- $\forall k>0,(\overline{z_k})^n=\left(e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n=e^{-2ik\pi}=\left(e^{-2i\pi}\right)^k=1$

C-

$$z_0+z_1+z_2+.....+z_{n-1}=1+\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)+\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^2+\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^3+...+\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1-\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n}{1-\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}=0$$ d'après la question A. C est donc juste

D- $\forall k,n-1\geq k\geq 0\Rightarrow \overline{z_k}=\overline{\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}=\left(e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)$

$z_{n-k}=e^{\frac{2i(n-k)\pi}{n}}=e^{\frac{2in\pi}{n}}\times e^{\frac{-2ik\pi}{n}}=e^{\frac{-2ik\pi}{n}}=\overline{z_k}$. D est donc juste

E- $|z_{k+1}-z_k|=\left|e^{\frac{2ik\pi}{n}\times(n+1)}-e^{\frac{2ik\pi}{n}\times n}\right|=\left|e^{\frac{2ik\pi n}{n}}\times e^{\frac{2ik\pi}{n}}-e^{\frac{2ik\pi}{n}\times n}\right|$

$$=\left|e^{\frac{2ik\pi n}{n}}\right|\times\left|1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right|=\left|e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\times\left(e^{-\frac{2ik\pi}{2n}}-e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right)\right|=\left|-2i\sin\left(\frac{2k\pi}{2n}\right)\right|=2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

donc $M_kM_{k+1}=2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ et E est juste

E7 Soit la suite $(Z_n)$ de complexes par : $Z_0 = 4$ et $\forall n > 0, Z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} \times Z_n$. On appelle $M_n$ le point du plan complexe d'affixe $Z_n$

- A ☐ $OM_2 = \frac{1}{2} OM_1$
- B ☐ Le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle en $M_2$
- C ☐ $\forall n > 0, \overrightarrow{OM_{n+3}} = -\frac{1}{8}\overrightarrow{OM_n}$
- D ☐ $\left(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$
- E ☐ La suite $(Z_n)$ converge vers zéro

corrigé C7

*Vous avez coché les cases: -*

*Il fallait cocher les cases: -A-C-E-*

---

A- $\dfrac{OM_{n+1}}{OM_n}=\dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|}=\left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}\right|=\dfrac{1}{2}$ et donc A est vraie

B-

$$Z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\times Z_0=\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\times 4=1+i\sqrt{3}.$$

$$Z_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\times 1+i\sqrt{3}=\frac{1-3+2i\sqrt{3}}{4}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_3=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\times\frac{1+i\sqrt{3}}{4}=\frac{-1-3}{8}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{Z_2-Z_1}{Z_2-Z_3}=\frac{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1-i\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{-3-i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}=i\sqrt{3}-1.$$

Or d'une part $\arg(i\sqrt{3}-1)=2\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ et de plus

$\arg\left(\dfrac{Z_2-Z_1}{Z_2-Z_3}\right)=\left(\overrightarrow{M_2M_3},\overrightarrow{M_2M_1}\right)[2\pi]$ donc ce triangle n'est pas rectangle en $M_2$

C- $Z_{n+3}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}=\left(\dfrac{1}{2}\times e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2\times Z_{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\times e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3\times Z_n=-\dfrac{1}{8}\times Z_n$. On en déduit que $\overrightarrow{OM_{n+1}}=-\dfrac{1}{8}\times\overrightarrow{OM_n}$

D- $Z_{n+1}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}\times Z_n$, donc $\arg(Z_{n+1})=\arg\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)+\arg(Z_n)[2\pi]$

Soit $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM_{n+1}}\right)=\dfrac{\pi}{3}+\left(\vec{u},\overrightarrow{OM_n}\right)[2\pi]$ et finalement

$\left(\overrightarrow{OM_n},\overrightarrow{OM_{n+1}}\right)=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ donc D est fausse.

E- $r_n=|z_n|$ et $r_{n+1}=|z_{n+1}|$ $\dfrac{r_{n+1}}{r_n}=\dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|}=\left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}\right|=\dfrac{1}{2}$ et par définition, la suite $(r_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et converge

E 8

Soient les points A,B,C d'affixes respectives $A\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)$, $B(2i)$ et $C(1+i)$ ; M est d'affixe Z, M est différent de A et tout point M du plan, on associe le point M' du plan d'affixe Z' que : $Z'=\dfrac{Z-2i}{2Z-1-i}$

A ☐ M'=O si et seulement si M=B

B ☐ Z' réel ⇔M appartient à la droite D d'équation $-3x-y+2=0$ privée de A

C ☐ Z' imaginaire pur ⇔ M décrit le cercle $C\left(\Omega\left(\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right),\frac{\sqrt{10}}{4}\right)$

D ☐ | Z' | = $\frac{1}{2}$ ⇔M appartient à la médiatrice de [AB]

E ☐ Z' est un réel strictement négatif ⇔M appartient au segment [AB]

corrigé C8

*Vous avez coché les cases:*

A- $M'=0 \Leftrightarrow Z'=0 \Leftrightarrow \dfrac{Z-2i}{2Z-1-i}=0 \Leftrightarrow Z-2i \Leftrightarrow Z=2i \Leftrightarrow M=B$

B-

$$Z'=\frac{x+iy-2i}{2(x+iy)-1-i}=\frac{(x+iy-2i)(2x-1-2iy+i)}{((2x-1)+i(2y-1))((2x-1)-i(2y-1))}$$
$$=\frac{2x^2+2ixy-4ix-x-iy+2i-2ixy+2y^2-4y+ix-y+2)}{(2x-1)^2+(2y-1)^2}$$
$$=\frac{(2x^2-x+2y^2-5y+2)+i(-3x-y+2)}{(2x-1)^2+(2y-1)^2}$$
$$=\frac{(2x^2-x+2y^2-5y+2)}{(2x-1)^2+(2y-1)^2}+\mathrm{i}\frac{(-3x-y+2)}{(2x-1)^2+(2y-1)^2}$$

et Z' non nul est un réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, $\Leftrightarrow$M appartient à la droite D d'équation $-3x-y+2=0$ privée de A. B est fausse, il ne faut pas oublier A !

C- Z' non nul imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle $\Leftrightarrow \dfrac{(2x^2-x+2y^2-5y+2)}{(2x-1)^2+(2y-1)^2}=0$

$$\Leftrightarrow\ 2x^2-x+2y^2-5y+2=0 \ \text{ et } \ (2x-1)^2\neq 0 \ \text{ et } \ (2y-1)^2\neq 0$$
$$\Leftrightarrow\ 2(x^2-\frac{x}{2}+y^2-\frac{5}{2}y+1)=0 \ \text{ et } \ (2x-1)^2\neq 0 \ \text{ et } \ (2y-1)^2\neq 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{16}-\frac{25}{16}+1=0 \ \text{ et } (2x-1)^2\neq 0 \ \text{ et } \ (2y-1)^2\neq 0$$
$$\Leftrightarrow\ \left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{10}{16} \ \text{ et } (2x-1)^2\neq 0 \ \text{ et } \ (2y-1)^2\neq 0$$

$\Leftrightarrow$M décrit le cercle $C\left(\Omega\left(\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right),\frac{\sqrt{10}}{4}\right)$ privé du point A.

D- $|Z'|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\dfrac{Z-2i}{2Z-1-i}\right|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow |Z-2i|=\frac{1}{2}|2Z-1-i|=\left|Z-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right|$

$\Leftrightarrow BM=AM \Leftrightarrow$M appartient à la médiatrice de [AB].

E- Z' est un réel strictement négatif $\Leftrightarrow$sa partie imaginaire est nulle et sa partie réelle négative $\Leftrightarrow -3x-y+2=0$ et

$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2<\frac{10}{16}$ $\Leftrightarrow$M appartient à la droite D d'équation $-3x-y+2=0$ privée de A et au disque ouvert

$D\left(\Omega\left(\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right),\frac{\sqrt{10}}{4}\right)$, or A et B appartiennent au cercle C et à la

E9 (****)

A
Si $|Z|=1$ et $Z \neq -1$, alors il existe x appartenant à R/ $Z=\dfrac{1+ix}{1-ix}$

B
Si $|Z|=1$ et $Z \neq 1$, alors $\forall u \in \mathbb{C} \Rightarrow \dfrac{u-Z\overline{u}}{1-Z} \in \mathbb{R}$

C
Réciproquement si $\forall u \in \mathbb{C}, \dfrac{u-Z\overline{u}}{1-Z} \in \mathbb{R}$, alors $|Z|=1$

D
Soit A(a), B(b), C(c ); ABC est équilatéral si et seulement $(a-b)=e^{i\frac{\pi}{3}}(a-c)$

E
Soit A(a), B(b), C(c ); ABC est équilatéral si et seulement si $a^2+b^2+c^2 - (a\times b+b\times c+c\times a)=0$

corrigé C9

Vous

A- On va faire un peu de trigonométrie :

$$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=\frac{\cos^2(a)-\sin^2(a)}{\cos^2(a)+\sin^2(a)}=\frac{1-\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}$$ en divisant le numérateur et le dénominateur par $\cos^2(a)$.

$$\sin(2a)=2\sin(a)\times\cos(a)=\frac{2\sin(a)\times\cos(a)}{\cos^2(a)+\sin^2(a)}=\frac{2\tan(a)}{1+\tan^2(a)}$$ en divisant à nouveau numérateur et le dénominateur par $\cos^2(a)$.

Calculons maintenant $\left|\frac{1+ix}{1-ix}\right|=\frac{|1+ix|}{|1-ix|}=\frac{|1+ix|}{\left|\overline{1-ix}\right|}=\frac{|1+ix|}{|1+ix|}=1$ enfin exprimons Z sous forme algébrique :

$$Z=\frac{1+ix}{1-ix}=\frac{(1+ix)^2}{(1-ix)\times(1+ix)}=\frac{1-x^2+2ix}{1+x^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}+i\frac{2x}{1+x^2}$$ ; on peut maintenant conclure : $|Z|=1\Leftrightarrow Z=\cos(2a)+i\times\sin(2a)$ et

$a\neq\frac{\pi}{2}[2\pi]$car $Z\neq-1$ au vu de ce qui précéder, on peut exprimer cos(2a) et sin(2a) en fonction de tan(a), légitimant la division par $\cos^2(a)$ car $a\neq\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et on trouve

$$|Z|=1\Leftrightarrow Z=\cos(2a)+i\times\sin(2a)=\frac{1-\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}+i\frac{2\tan(a)}{1+\tan^2(a)}$$ et en utilisant l'écriture algébrique de Z, on obtient(en posant x=tan(a) )

$$Z=\frac{1-\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}+i\frac{2\tan(a)}{1+\tan^2(a)}=\frac{1-x^2}{1+x^2}+i\frac{2x}{1+x^2}=\frac{1+ix}{1-ix}$$ ; A est juste

B- Posons $u=a+ib$ et $Z=e^{ix}$, $|Z|=1\Leftrightarrow Z=e^{ix}$ et

$$Z\neq1\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\frac{u-Z\overline{u}}{1-Z}=\frac{a+i\times b-e^{ix}(a-i\times b)}{1-e^{ix}}=\frac{a\times(1-e^{ix})+i\times b\times(1+e^{ix})}{1-e^{ix}}$$

$$=a+\frac{i\times b\times e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}}+e^{i\frac{x}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}\right)}=a+i\times b\times\frac{2\cos\frac{x}{2}}{-2i\sin\frac{x}{2}}=a-b\times\mathrm{cotan}\frac{x}{2}$$

qui est un réel qui existe car $x\neq\frac{\pi}{2}[2\pi]$

C- Réciproquement si $\frac{u-Z\overline{u}}{1-Z}=r$ où r est un réel,

$u-Z\overline{u}=r(1-Z)\Leftrightarrow Z(\overline{u}-r)=u-r\Leftrightarrow Z=\frac{\overline{u}-r}{u-r}$ à condition que u soit un complexe différent de r ; dans ces conditions,

$|Z|=\left|\frac{\overline{u}-r}{u-r}\right|=\left|\frac{\overline{u-r}}{u-r}\right|=1$ et la réciproque est vraie en limitant à *avez coché les cases: -*

E10

Soient les points A,B d'affixes respectives $A(1), B(-1)$ et à tout point M du plan d'affixe Z, on associe le point M' du plan d'affixe Z' tel que : $Z' = -\dfrac{1}{\overline{Z}}$ ; Soit C le cercle de centre A de rayon 1 privé de O.

A ☐ $\overline{Z'-1} = \dfrac{1}{Z}(Z-1)$

B ☐ Si M' appartient à C, M appartient à la médiatrice de [OB]

C ☐ $\dfrac{Z'+1}{Z'-1} = -\dfrac{\overline{Z}-1}{\overline{Z}+1}$

D ☐ $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[2\pi]$

E ☐ Les points O,M et M' sont alignés

corrigé C10

*Vous avez coché les cases: -*

*Il fallait cocher les cases: -B-C-D-E-*

A- $\overline{Z'-1} = \overline{-\frac{1}{\overline{Z}}-1} = \frac{\overline{-1-\overline{Z}}}{\overline{\overline{Z}}} = -\frac{\overline{\overline{Z+1}}}{\overline{\overline{Z}}} = -\frac{Z+1}{Z}$ ; A est fausse

B- $\overline{Z'-1} = \overline{-\frac{1}{\overline{Z}}-1} = \frac{\overline{-1-\overline{Z}}}{\overline{\overline{Z}}} = -\frac{\overline{\overline{Z+1}}}{\overline{\overline{Z}}} = -\frac{Z+1}{Z}$ Si M' appartient à C,

$|Z'-1| = 1$. On déduit que $1 = |Z'-1| = |\overline{Z'-1}| = \left|\frac{Z+1}{Z}\right| = \frac{BM}{OM}$ et par une simple interprétation géométrique, on en déduit que B appartient à la médiatrice de [OB], B est vraie

C- $\overline{Z'+1} = \overline{-\frac{1}{\overline{Z}}+1} = \frac{\overline{-1+\overline{Z}}}{\overline{\overline{Z}}} = -\frac{\overline{\overline{Z-1}}}{\overline{\overline{Z}}} = \frac{Z-1}{Z}$

$\left(\overline{\frac{Z'+1}{Z'-1}}\right) = \frac{\frac{Z-1}{Z}}{\frac{Z+1}{Z}} = \frac{Z-1}{Z+1} - \frac{\overline{Z}-1}{\overline{Z}+1}$ et $\left(\frac{Z'+1}{Z'-1}\right) = \left(-\overline{\frac{Z-1}{Z+1}}\right) = -\frac{\overline{Z}-1}{\overline{Z}+1}$ ;

C est donc vraie

D- $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[2\pi]$ $\arg\left(\frac{Z'+1}{Z'-1}\right) = \arg\left(-\frac{\overline{Z}-1}{\overline{Z}+1}\right)[2\pi]$ et

$\arg(Z'+1) - \arg(Z'-1) = \pi + \arg(\overline{Z-1}) - \arg(\overline{Z+1})[2\pi]$

$\arg(Z'+1) - \arg(Z'-1) = \pi + \pi + \arg(Z-1) - \pi - \arg(Z+1)[2\pi]$

$(\vec{u}, \overline{BM'}) - (\vec{u}, \overline{AM'}) = \pi + (\vec{u}, \overline{AM}) - (\vec{u}, \overline{BM})[2\pi]$

$(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{BM'}) = \pi + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})[2\pi]$ et $(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{BM'}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})[2\pi]$

enfin $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[2\pi]$

E- $Z' = -\frac{1}{\overline{Z}} \Rightarrow \arg(Z') = \pi - \arg(\overline{Z}) = \pi + \arg(Z)[2\pi]$ En passant à l'interprétation en termes d'angles, $(\vec{u}, \overline{0M'}) = \pi + (\vec{u}, \overline{OM})[2\pi]$ et $(\overline{OM}, \overline{0M'}) = \pi[2\pi]$ ; on en déduit que M,O,M' sont alignés dans cet ordre et E est juste.