Qcm

Généralités sur les fonctions

Préambule: dans les exercices suivants, les fonctions sont représentées dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j})$.

E1	La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3+x^2+5x+6$
A ☐	Pour $x\neq 0$, $f(x)=2x^3\left(1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{5}{2x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)$
B ☐	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
C ☐	f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=6x^2+2x+5$.
D ☐	f est stictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
E ☐	$f(x)$ est factorisable par $(x+1)$.

E2	f est définie dans $\mathbb{R}-\{5\}$ par $f(x)=\dfrac{3x^2-5x}{x-5}$
A ☐	$\lim\limits_{x\to 5} f(x)=-\infty$

B ☐ pour $x \neq 5$ et $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{3x(1-\frac{5}{3x})}{1-\frac{5}{x}}$

C ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

D ☐ pour tout x de $\mathbb{R}-\{5\}$, $f(x) = 3x+10+\dfrac{50}{x-5}$

E ☐ les droites d'équation $x = 5$ et $y = 3x+10$ sont asymptotes à la courbe représentative de f.

E3 f est définie dans $\mathbb{R}-\{-1;+1\}$ par $f(x) = 1+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}$

A ☐ Le point I(0;1) est centre de symétrie pour la courbe de f.

B ☐ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

C ☐ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

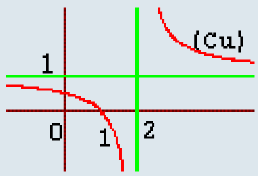
D ☐ $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

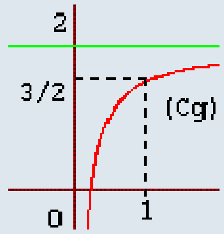
E ☐ f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1\,;\,+1[$ et $]1\,;\,+\infty[$.

E4

u est définie dans $\mathbb{R}-\{2\}$ par $u(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$ et g est définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$. Les courbes (Cu) et (Cg) sont tracées ci dessous.

On considère la fonction composée $f=g\circ u$.





A ☐ f est définie dans $\mathbb{R}-\{2\}$.

B ☐ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$.

C ☐ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1{,}5$

D ☐ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

E ☐ f est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty;+1[$ et $]\,2;+\infty[$.

E5

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\sin x$

A ☐ la courbe de f est située entre les droites d' équation $y=x-1$.

B ☐ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$.

C ☐ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}=1$.

D ☐ f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

E ☐ la courbe de f admet une tangente horizontale en tout point d' abscisse $x=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

E6 — f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - \sqrt{x^2+1}$

A ☐ les théorèmes généraux ne permettent pas de conclure rapidement quant à la limite de f en $-\infty$.

B ☐ pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{3x - \dfrac{1}{x}}{2 + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}}$.

C ☐ pour tout réel x, $f'(x) = 2 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et donc pour $x \leq 0$ on a $f'(x) > 0$.

D ☐ pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{3x^2+4}{\sqrt{x^2+1}\,(2\sqrt{x^2+1}+x)}$

E ☐ f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

E7 — f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$

A ☐ sur $]0\,;+\infty[$ f est dérivable.

B ☐ f n'est pas dérivable en 0.

C ☐ la courbe (C) de f admet à l'origine du repère une demi-tangente verticale.

D ☐ la position de (C) par rapport à la droite d'équation $y = x$ est donnée par le signe du polynôme du second degré $x(x+1)$.

E ☐ une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

E8	f est définie dans $\mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ par $f(x) = \frac{\sin x}{1+\sin x}$

A ☐ 2π est une période de f.

B ☐ f est paire.

C ☐ $f(\pi - x) = -f(x)$.

D ☐ la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe de f.

E ☐ $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$

E9	f est définie sur $[-2\ ;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$

A ☐ si $x \in [0\ ;2]$ alors $f(x) \in [0\ ;2]$.

B ☐ pour tout x de $[0;2]$, $f(x) \le x$.

C ☐ pour $x \ge -2$, $|f(x) - 2| = \frac{|x-2|}{\sqrt{x+2}+2}$.

D ☐ pour $x \ge -2$, $|f(x) - 2| \le \frac{1}{2}|x-2|$.

E ☐ f est dérivable en -2 et la courbe de f admet au point A(-2 ; 0) une demi-tangente horizontale.

E10	f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

A ☐ l'axe des abscisses est asymptote à la courbe de f.

B ☐ la courbe de f admet l' origine du repère comme centre de symétrie.

C ☐ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

D ☐ l' image par f de l'intervalle $[0;1]$ est l'intervalle $[0;1]$.

E ☐ l' équation $f(x) = \dfrac{3}{4}$ admet une solution unique dans $[0;1]$.

CORRECTION

EX1

A- Pour $x \neq 0$, $f(x) = 2x^3\left(1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{5}{2x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)$, factorisation simple.

B- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{2x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^3} = 0$ donc la limite de la parenthèse en $-\infty$ est égale à 1. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$.

D' après les théorèmes généraux sur la limite d'un produit on obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

C- f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 6x^2+2x+5$.

D- f'(x) est un polynôme du second degré dont le discriminant est strictement négatif ($\Delta = -116$) donc f'(x) a le signe du coefficient de x^2 sur $\mathbb{R}$. D' où $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ et f est stictement croissante sur $\mathbb{R}$.

E- $f(-1) = 0$ donc -1 est une racine de f(x) et par suite f(x) est factorisable par $(x+1)$.

EXE2

A- $\lim\limits_{x \to 5}(3x^2 - 5x) = 50$ et $\lim\limits_{x \to 5}(x-5) = 0$. D'autre part :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$x - 5$		$-$	0	$+$	

d' où $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = +\infty$

B- pour $x \neq 5$ et $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{3x^2(1-\frac{5}{3x})}{x(1-\frac{5}{x})} = \dfrac{3x(1-\frac{5}{3x})}{1-\frac{5}{x}}$ en

simplifiant par x.

C- $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \dfrac{5}{3x}) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \dfrac{5}{x}) = 1$

On peut donc conclure : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

D- Cherchons trois réels a,b et c tels que : pour tout x de $\mathbb{R} - \{5\}$,

$\dfrac{3x^2 - 5x}{x-5} = ax + b + \dfrac{c}{x-5}$ soit

$\dfrac{3x^2 - 5x}{x-5} = \dfrac{(ax+b)(x-5)+c}{x-5} = \dfrac{ax^2 + (b-5a)x - 5b + c}{x-5}$

En identifiant les deux expresions de f(x) on obtient le système

$\begin{cases} a = 3 \\ b - 5a = -5 \\ -5b + c = 0 \end{cases}$ qui donne $a = 3$, $b = 10$ et $c = 50$

Donc pour tout x de $\mathbb{R} - \{5\}$, $f(x) = 3x + 10 + \dfrac{50}{x-5}$

E- D' après les résultats du A on peut affirmer que la droite d' équation $x = 5$ est asymptote à la courbe représentative de f.

De plus : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (3x+10)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{50}{x-5} = 0$ donc la droite

d' équation $y = 3x + 10$ est aussi asymptote à la courbe de f.

EXE3

A- $\lim\limits_{x \to 5}(3x^2 - 5x) = 50$ et $\lim\limits_{x \to 5}(x - 5) = 0$. D'autre part :

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$x - 5$	$-$	0	$+$

d' où $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = +\infty$

B- pour $x \neq 5$ et $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{3x^2(1 - \frac{5}{3x})}{x(1 - \frac{5}{x})} = \dfrac{3x(1 - \frac{5}{3x})}{1 - \frac{5}{x}}$ en simplifiant par x.

C- $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty}(1 - \dfrac{5}{3x}) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}(1 - \dfrac{5}{x}) = 1$

On peut donc conclure : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

D- Cherchons trois réels a,b et c tels que : pour tout x de $\mathbb{R} - \{5\}$,

$\dfrac{3x^2 - 5x}{x - 5} = ax + b + \dfrac{c}{x - 5}$ soit

$$\frac{3x^2 - 5x}{x - 5} = \frac{(ax + b)(x - 5) + c}{x - 5} = \frac{ax^2 + (b - 5a)x - 5b + c}{x - 5}$$

En identifiant les deux expresions de $f(x)$ on obtient le système

$\begin{cases} a = 3 \\ b - 5a = -5 \\ -5b + c = 0 \end{cases}$ qui donne $a = 3$, $b = 10$ et $c = 50$

Donc pour tout x de $\mathbb{R} - \{5\}$, $f(x) = 3x + 10 + \dfrac{50}{x - 5}$

E- D' après les résultats du A on peut affirmer que la droite d' équation $x = 5$ est asymptote à la courbe représentative de f.

De plus : $\lim\limits_{x \to \pm\infty}[f(x) - (3x + 10)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{50}{x - 5} = 0$ donc la droite d' équation $y = 3x + 10$ est aussi asymptote à la courbe de f.

EXE4

A- L' ensemble de définition de f est symétrique par rapport au réel 0.

$\frac{1}{2}[f(0+x)+f(0-x)] = \frac{1}{2}[1+\frac{3}{x-1}+\frac{3}{x+1}+1-\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x-1}] = 1.$

Donc le point I (0 ; 1) est un centre de symétrie pour la courbe de f.

B- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x-1}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x+1}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

C- $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{3}{x-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to1}[1+\frac{3}{x+1}]=\frac{5}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$

D- $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{3}{x+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1}[1+\frac{3}{x-1}]=-\frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$

E- f, fonction rationnelle , est dérivable sur tout intervalle de son ensemble de définition soit sur $]-\infty;-1[$, $]-1\ ;\ +1\ [$ et $]\ 1\ ;\ +\infty\ [$.

$f'(x)=\frac{-3}{(x-1)^2}+\frac{-3}{(x+1)^2}$. Il est évident que $f'(x)<0$ sur les intervalles précédants. Donc f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1\ ;\ +1\ [$ et $]\ 1\ ;\ +\infty\ [$.

EXE5

A- La fonction composée $f = g \circ u$ est définie si la fonction u est définie et si le réel u(x) appartient à l'ensemble de définition de la fonction g soit si $x\neq2$ et si $\frac{x-1}{x-2}>0$. Le signe de ce quotient est le même que celui du polynôme du $2^{ème}$ degré $(x-1)(x-2)$ pour $x\neq2$.

Donc f est définie sur les intervalles $]-\infty\ ;\ +1\ [$ et $]\ 2\ ;\ +\infty\ [$.

B- $\lim\limits_{x\to1^-}u(x)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$.

C- $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to1}g(x)=1{,}5$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1{,}5$.

D- $\lim\limits_{x\to2+}u(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=2$ donc $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=2$.

E- u est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}-\{2\}$ et g est dérivable en tout point $u(x_0)$ tel que $u(x_0)>0$. Donc la composée $f = g \circ u$ est dérivable sur les intervalles $]-\infty;+1[$ et $]\ 2;+\infty[$.

Les fonctions f et g ont des sens de variation opposés donc la composée $f = g \circ u$ est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty;+1[$ et $]\ 2;+\infty[$.

EXE6

A- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $-1 \le \sin x \le +1$. Alors $-1 \le -\sin x \le +1$ puis $x-1 \le x-\sin x \le x+1$ soit $x-1 \le f(x) \le x+1$.
Interprétation graphique de cet encadrement: la courbe de f est située entre les droites d'équation $y = x-1$ et $y = x+1$.

B- $f(x) \ge x-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
$f(x) \le x+1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

C- Pour $x \ne 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x-\sin x}{x} = 1 - \dfrac{\sin x}{x}$

Or $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ (voir cours) donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$.

D- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme algébrique de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 1-\cos x$. Puisque pour tout x de $\mathbb{R}$ $\cos x \le 1$ on a $f'(x) \ge 0$ et donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

E- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \pmod{2\pi}$ donc la courbe de f admet une tangente horizontale en tout point d'abscisse $x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

EXE7

A- $\lim_{x\to-\infty}(2x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}(-\sqrt{x^2+1}) = -\infty$. On peut donc conclure à l'aide des théorèmes généraux : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

B- En multipliant et divisant $f(x)$ par son expression conjuguée :

$$f(x) = \frac{(2x-\sqrt{x^2+1})(2x+\sqrt{x^2+1})}{2x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{4x^2-(x^2+1)}{2x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{3x^2-1}{2x+\sqrt{x^2+1}}$$

pour $x>0$, $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$. Alors, pour $x>0$,

$$f(x) = \frac{x(3x-\frac{1}{x})}{x(2+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})} = \frac{3x-\frac{1}{x}}{2+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$

C- pour tout réel x, $f'(x) = 2 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

et il est évident que pour $x \le 0$ on a $f'(x) > 0$.

D- pour $x>0$, le signe de $f'(x)$ n'est pas immédiat. Transformons l'écriture de $f'(x)$ en deux étapes :

- réduction au même dénominateur $f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}$
- utilisation de l'expression conjuguée du numérateur

$$f'(x) = \frac{(2\sqrt{x^2+1}-x)(2\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}(2\sqrt{x^2+1}+x)} = \frac{4(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}(2\sqrt{x^2+1}+x)}$$

soit $f'(x) = \frac{3x^2+4}{\sqrt{x^2+1}\,(2\sqrt{x^2+1}+x)}$

E- Il est clair que pour $x>0$ on a également $f'(x)>0$. Finalement pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $f'(x)>0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

EXE7

A- Sur $]0 ; +\infty[$ f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

B- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Les théorèmes généraux ne permettent pas de conclure quant à la dérivabilité de f en 0. Aussi revenons à la définition du nombre dérivé:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$, limite finie, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

C- la courbe (C) de f admet à l'origine du repère une demi-tangente de coefficient directeur $f'(0) = 0$ donc horizontale.

D- la position de (C) par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$ est donnée par le signe de la différence

$d(x) = f(x) - x = x\sqrt{x} - x = x(\sqrt{x} - 1) = \dfrac{x(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x}+1}$.

d(x) étant du signe du polynôme du second degré $x(x+1)$,

on en déduit :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-x$	0	$-$	0	$+$	
(C) / (D)		$\dfrac{(D)}{(C)}$		$\dfrac{(C)}{(D)}$	

E- une équation de la tangente à (C) au point d' abscisse 1 est $y - f(1) = f'(1)(x-1)$. Or, pour $x > 0$, $f'(x) = \sqrt{x} + x\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ soit

$f'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$ donc $f'(1) = \dfrac{3}{2}$. Par suite une

équation de la tangente est $y - 1 = \dfrac{3}{2}(x-1)$ ou $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

EXE8

A- Pour tout x de l'ensemble de définition D de f, $(x+2\pi)\in D$

et $f(x+2\pi)=\dfrac{\sin(x+2\pi)}{1+\sin(x+2\pi)}=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}=f(x)$ car 2π est une période de la fonction sinus. Donc 2π est une période de f.

B- D n'est pas symétrique par rapport au réel 0 donc f n'est ni paire ni impaire.

C- $f(\pi-x)=\dfrac{\sin(\pi-x)}{1+\sin(\pi-x)}=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}=f(x)$.

D- D est symétrique par rapport au réel $\dfrac{\pi}{2}$ et $f(\pi-x)=f(x)$.

Donc la droite d'équation $x=\dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe de f.

E- $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\sin x=-1^+$ donc $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}(1+\sin x)=0^+$. Alors $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}f(x)=-\infty$.

EXE9

A- Par inégalités successives on obtient :

si $x\in[0\,;2]$ alors $(x+2)\in[2;4]$ puis $\sqrt{x+2}\in[\sqrt{2};2]$.

Or $\sqrt{2}>0$ et $2\le 2$ donc $f(x)\in[0;2]$.

B- Pour $x\ge 0$, $f(x)-x=\sqrt{x+2}-x=\dfrac{(\sqrt{x+2}-x)(\sqrt{x+2}+x)}{\sqrt{x+2}+x}$ soit

$f(x)-x=\dfrac{x+2-x^2}{\sqrt{x+2}+x}=\dfrac{(x+1)(-x+2)}{\sqrt{x+2}+x}$. On en déduit facilement que pour tout x de $[0;2]$, $f(x)-x\ge 0$ donc que $f(x)\ge x$.

C- Pour $x\ge -2$, $f(x)-2=\sqrt{x+2}-2=\dfrac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{\sqrt{x+2}+2}$ ou

$f(x)-2=\dfrac{x+2-4}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}$ donc $|f(x)-2|=\dfrac{|x-2|}{\sqrt{x+2}+2}$.

D- Pour $x\ge -2$, on a $\sqrt{x+2}\ge 0$ puis $\sqrt{x+2}+2\ge 2$ et

$\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}\le\dfrac{1}{2}$ donc $|f(x)-2|\le\dfrac{1}{2}|x-2|$

E- $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}=+\infty$

En effet pour $x>-2$ on a $x+2>0$ et $x+2=(\sqrt{x+2})^2$

f n'est donc pas dérivable en -2 et la courbe de f admet au point $A(-2\,;0)$ une demi-tangente vertiale.

EXE10

A- $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0$. On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe de f en $+\infty$

B- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ et $f(-x)=f(x)$. Donc la courbe de f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

C- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

D- f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[\,0\,;1\,]$.

Donc $f([0\,;1])=[f(1)\,;f(0)]=[\frac{1}{2}\,;1]$.

E- $\dfrac{3}{4}\in[\,\dfrac{1}{2}\,;1\,]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=\dfrac{3}{4}$ admet une solution unique dans $[\,0\,;1\,]$.