PRODUIT SCALAIRE
EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

Répondre par VRAI (V) ou FAUX (F) :

Question 1

Soient A, B et C trois points distincts du plan.

a) A, B et C sont alignés si et seulement si : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC$

b) (AB) et (AC) sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

c) A est le milieu de [BC] si et seulement si : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB^2$

Question 2

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et de côté 2.

a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2$ b) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2$ c) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CO}$

Question 3

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\vec{u}^{\,2}=\vec{v}^{\,2}$, alors :

a) $\vec{u}=\vec{v}$ ou $\vec{u}=-\vec{v}$ b) $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ c) $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux

Question 4

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{w}$, alors :

a) $\vec{v}=\vec{w}$ b) $\vec{u}=\vec{0}$ c) $\vec{u}$ et $\vec{v}-\vec{w}$ sont orthogonaux

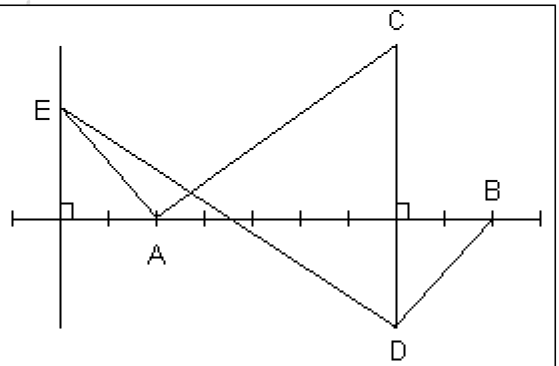
Question 5

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\vec{u}.\vec{v}=-3$ $\|\vec{u}\|=\sqrt{6}$ et $\|\vec{v}\|=\sqrt{2}$, alors :

a) $(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{2\pi}{3}$ b) $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{2}$ c) $\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{14}$

Exercice n°2.

Dans la configuration ci-dessous, on a AB=7



Déterminer, par lecture graphique, les produits scalaires : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}$

Exercice n°3.

ABC est un triangle équilatéral de côté a

H est le projeté orthogonal de A sur (BC) et O le centre du cercle circonscrit à ABC.

Exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

Exercice n°4.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de même norme.

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux

Exercice n°5.

A,B et C sont trois points du plan tels que AB=3 , AC=2 et $\widehat{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$ radians

1) On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$

2) Construire les points D et E définis par $\overrightarrow{AD}=2\vec{u}-3\vec{v}$ et $\overrightarrow{AE}=-\vec{u}+4\vec{v}$

3) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AE}$

4) En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près par défaut de l'angle $\widehat{DAE}$

Exercice n°6.
ABCD est un rectangle de centre O tel que AB=8 et AD=5
1) Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$
2) On désigne par α une mesure de l'angle $\widehat{AOB}$
Calculer $\cos\alpha$ puis en déduire une valeur approchée par défaut à 1 degré près de α
3) H et K sont les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur (AC). Calculer AK et HK
4) Donner la valeur exacte de $\tan\left(\widehat{HDK}\right)$. En déduire une valeur approchée à 1 degré près de $\widehat{HDK}$

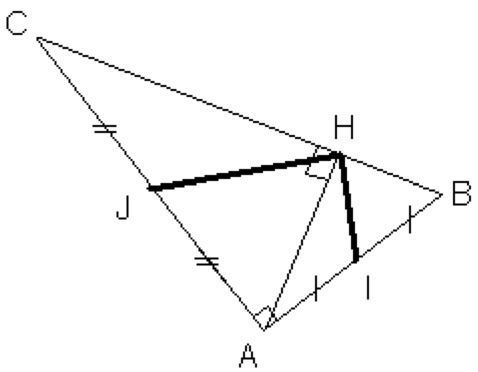
Exercice n°7.
Soit ABC un triangle. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et BC dans chacun des cas suivants :
1) AB=6 cm , AC=5 cm et $\widehat{BAC}=60°$
2) AB=7 cm , AC=4 cm et $\widehat{BAC}=120°$

Exercice n°8.
On considère un triangle ABC tel que AB=11, AC=13 et BC=16
Déterminer une mesure en degré des trois angles de ce triangle (arrondir à 0,1 degré près)

Exercice n°9.
Le plan étant muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$,
1) Déterminer une équation du cercle C_1 de centre le point A(-2 ;1) et de rayon 5
2) Déterminer une équation du cercle C_2 de diamètre [BC] avec B(-1 ;2) et C(3 ;-1)
3) Déterminer la nature de l'ensemble E_3 d'équation $x^2+y^2+7x-8y+8=0$
4) Déterminer la nature de l'ensemble E_4 d'équation $x^2+y^2+6x-10y+34=0$

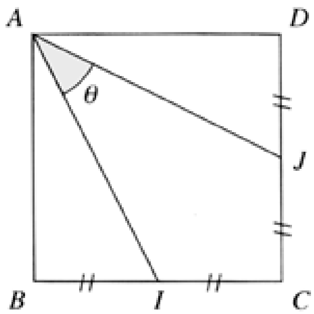
Exercice n°10.
Le plan étant muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$,
1) Identifier l'ensemble E d'équation $x^2+y^2-4x+2y-5=0$
Etudier l'intersection de E et de la droite (d) d'équation $x-2y+1=0$
2) Identifier les ensembles E_1 d'équation $x^2+y^2+2x-4y-13=0$ et E_2 d'équation $x^2+y^2-6x+4y+11=0$
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de E_1 et E_2

Exercice n°11.
ABC est un triangle rectangle en A.
H est le projeté orthogonal de A sur (BC)
I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC]



Démontrer que (HI) et (HJ)sont perpendiculaires.

Exercice n°12.
Soit ABCD un carré de côté *a*, I le milieu de [BC] et J celui de [DC].
On se propose d'évaluer l'angle $\widehat{IAJ}$ de mesure θ.
1) Exprimer $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\cos(\theta)$ et de *a*.
2) a). Exprimer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
b) Donner une autre expression de $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$.
3) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos(\theta)$ et une valeur valeur approchée à 10^{-2} près par défaut, de θ (en degrés).



Exercice n°13. (correction)
Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points A(5 ;6) et B(-1 ;-2)
1) Déterminer l'équation du cercle *C* de diamètre [AB]
2) Vérifier que le point D(-1 ;6) appartient à *C* et déterminer une équation de la tangente T à *C* au point D.

Exercice n°14. (correction)
On considère les points A(2;1;1) , B(3;0;2) et C(0;2;1).
On cherche à déterminer une équation du plan (ABC) de la forme $ax+by+cz=d$, par deux méthodes différentes.
1) a) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Vérifiez que les points A,B et C définissent un plan (ABC).
b) Déterminer un vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ au plan (ABC). (on pourra écrire que $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$ *et* $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0$, et choisir a=1)
c) En déduire une équation du plan (ABC)
2) En écrivant que chacun des points A,B et C appartient au plan (ABC), déterminer une équation de ce plan (On sera amené à choisir une valeur pour l'un des nombres *a*, *b*, *c* ou *d*.)

Exercice n°15. ( )
Soient les deux plans P et P' d'équations respectives dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$
Pour P : $(\cos t)\,x + (\sin t)\,y - z = 0$
Pour P' : $(\cos t)\,x + (\sin t)\,y + z = 0$
où *t* représente un paramètre réel.
1) P et P' sont-ils perpendiculaires? Justifier.
2) Pour quelles valeurs de *t* l'axe O*x* est-il parallèle à P ?
3) Donner un vecteur directeur de la droite intersection des deux plans.
4) Calculer la distance de A(cos *t*, sin *t*, -3) au plan P.

PRODUIT SCALAIRE – CORRECTION

Exercice n°1

Question 1

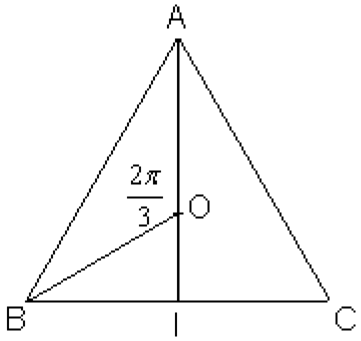
a) **FAUX .** En effet, si les points B,A et C sont alignés « dans cet ordre » (c'est-à-dire si A appartient au segment [BC], alors on aura $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AC$

b) **VRAI** par définition

c) **VRAI** A est le milieu de [BC] ssi $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\pi\ [\pi]$ donc ssi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times\underbrace{AC}_{=AB}\times\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}=-AB^2$

Question 2

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et de côté 2.
Notons I le pied de la médiane issue de A



a) **FAUX** $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\times OB=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. Puisque le triangle est équilatéral, la médiane [AI] est aussi hauteur, donc d'après le théorème de Pythagore, $AI=\sqrt{AB^2-BI^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$, et ainsi $OA=\frac{2}{3}AI=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

On conclut donc que $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{3}$

b) **FAUX** $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ car O étant le centre de gravité du triangle équilatéral, il est aussi centre du cercle circonscrit au triangle, donc (BO) est la hauteur issue de B dans le triangle, donc est orthogonale à (AC)

c) **VRAI** En utilisant la relation de Chasles, la distributivité du produit scalaire, et la question précédente, on obtient $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}\cdot\left(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CO}+\underbrace{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OB}}_{0}$

Question 3

a) **FAUX** on a l'équivalence $\vec{u}^2=\vec{v}^2\Leftrightarrow\|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|^2$ qui peut être vérifiée par des vecteurs de même norme, mais pas nécessairement égaux ou opposés.

b) **VRAI** car puisque $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ sont des quantités positives, on a l'équivalence $\vec{u}^2=\vec{v}^2\Leftrightarrow\|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|^2\Leftrightarrow\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$

c) **VRAI** en utilisant l'identité $\vec{u}^2=\vec{v}^2\Leftrightarrow\vec{u}^2-\vec{v}^2=0\Leftrightarrow(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=0$

Question 4

a) **FAUX** On ne peut pas « simplifier » par $\vec{u}$. En effet, il « suffirait » que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'une part, et $\vec{u}$ et $\vec{w}$ d'autre part, soient orthogonaux, pour que l'on ait $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{w}=0$, sans avoir pour autant $\vec{v}=\vec{w}$

b) **FAUX** Il « suffirait » que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'une part, et $\vec{u}$ et $\vec{w}$ d'autre part, soient orthogonaux, pour que l'on ait $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{w}=0$, sans avoir pour autant $\vec{u}=\vec{0}$

c) **VRAI** on a l'équivalence $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{w}=0\Leftrightarrow\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w})=0$

Question 5

a) **FAUX** A partir de l'égalité $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$, on en déduit $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}=\frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$, donc $(\vec{u},\vec{v})=\pm\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

b) **VRAI** On utilise l'identité $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}=6+2-6=2$, d'où le résultat

c) **VRAI** On utilise l'identité $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}=6+2+6=14$, d'où le résultat

Exercice n°2

Si on appelle H le projeté orthogonal de C sur (AB) (cf figure complétée), alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de même sens, on aura $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=AB\times AH=7\times5=35$

Ainsi $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=35}$

On « réarrange » l'écriture des vecteurs avant de calculer le produit scalaire :

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BA}\cdot\left(-\overrightarrow{BD}\right)=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$

Le point H précédemment défini est le projeté orthogonal de D sur (AB), donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BH}=BA\times BH$ car les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires de même sens. Ainsi $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=7\times2=14$ et on conclut $\boxed{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DB}=-14}$

Si on appelle K le projeté orthogonal de E sur (AB) (cf figure complétée), alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AK}$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires de sens contraire, on aura $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AK}=-AB\times AK=-7\times2=-14$

Ainsi $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-14}$

En utilisant la relation de Chasles, et la distributivité du produit scalaire, on écrit

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}\right)$

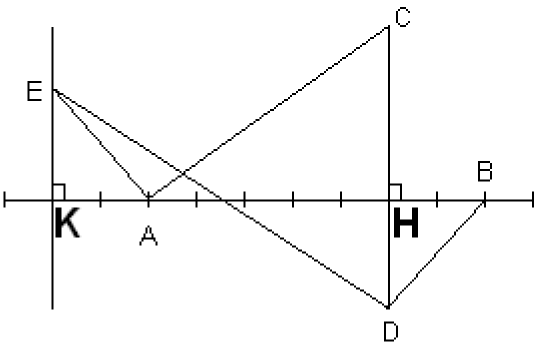
$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\left(-\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$

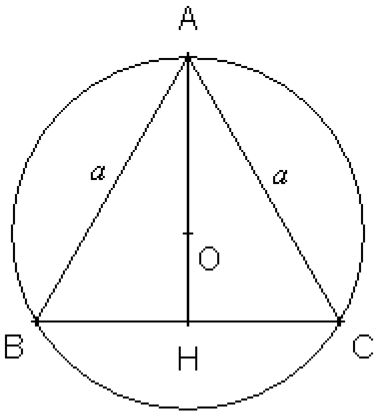
$=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$

En projetant le point D sur (AD), on obtient $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=AB\times AH=7\times5=35$

Ainsi $-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-35-14=-49$. On conclut $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=-49}$



Exercice n°3



GUESMI.B

1) Puisque le triangle ABC est équilatéral, l'angle $\widehat{BAC}$ mesure $\frac{\pi}{3}$ radians

Ainsi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cos\left(\widehat{BAC}\right)=a\times a\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\times a\times\frac{1}{2}\boxed{=\frac{a^2}{2}}$

2) 1ère méthode :

On « réarrange » l'écriture des vecteurs avant de calculer le produit scalaire :

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=\left(-\overrightarrow{CA}\right)\cdot\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$. Le produit scalaire $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ se calcule comme celui ci-dessus :

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\left\|\overrightarrow{CA}\right\|\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\cos\left(\widehat{ACB}\right)=a\times a\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\times a\times\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$

Ainsi $\boxed{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=-\frac{a^2}{2}}$

<u>2ème méthode :</u>

On utilise la relation de Chasles, et la distributivité du produit scalaire, pour écrire

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)$

$=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=-AC^2\quad+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=-a^2+\frac{a^2}{2}\boxed{=-\frac{a^2}{2}}$

3) <u>1ère méthode :</u>

H est le projeté orthogonal de B sur (AH)

Ainsi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$ (symétrie du produit scalaire)

$=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH}=AH^2$

On utilise un résultat bien connu stipulant que la hauteur AH du triangle équilatéral mesure $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

Ainsi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=AH^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2\boxed{=\frac{3}{4}a^2}$

<u>2ème méthode :</u>

On calcule directement $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AH}\right\|\cos\left(\widehat{BAH}\right)$

Puisque le triangle ABC est équilatéral, la hauteur [AH] issue de A est également bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, de sorte que l'angle $\widehat{BAH}$ mesure $\frac{\pi}{6}$ radians.

Ainsi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}\boxed{=\frac{3}{4}a^2}$. On retrouve le même résultat !

4) <u>1ère méthode :</u>

Puisque le triangle ABC est équilatéral, la hauteur [AH] issue de A est également médiane issue de A. Le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est aussi centre de gravité du triangle, de sorte que $OA=\frac{2}{3}AH=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ et de même pour la longueur OB. Enfin, l'angle $\widehat{AOB}$ mesure $\frac{2\pi}{3}$ radians.

On calcule donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\left\|\overrightarrow{OB}\right\|\cos\left(\widehat{AOB}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}a\times\frac{\sqrt{3}}{3}a\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}a^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\boxed{-\frac{1}{6}a^2}$

<u>2ème méthode :</u>

H est le projeté orthogonal de B sur (OA), de sorte que $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$. Puisque les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires de sens opposé, on aura $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}=-OA\times OH$

Puisque le triangle ABC est équilatéral, la hauteur [AH] issue de A est également médiane issue de A. Le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est aussi centre de gravité du triangle, de sorte que $OA=\frac{2}{3}AH=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ et $OH=\frac{1}{3}AH=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{6}a$. On retrouve ainsi $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}=-\frac{\sqrt{3}}{3}a\times\frac{\sqrt{3}}{6}a\boxed{=-\frac{1}{6}a^2}$

GUESMI.B

Exercice n°4

On applique « l'identité remarquable du produit scalaire » :

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$. Mais puisque, par hypothèse, $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$, on aura $\|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|^2$, donc $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=0$.

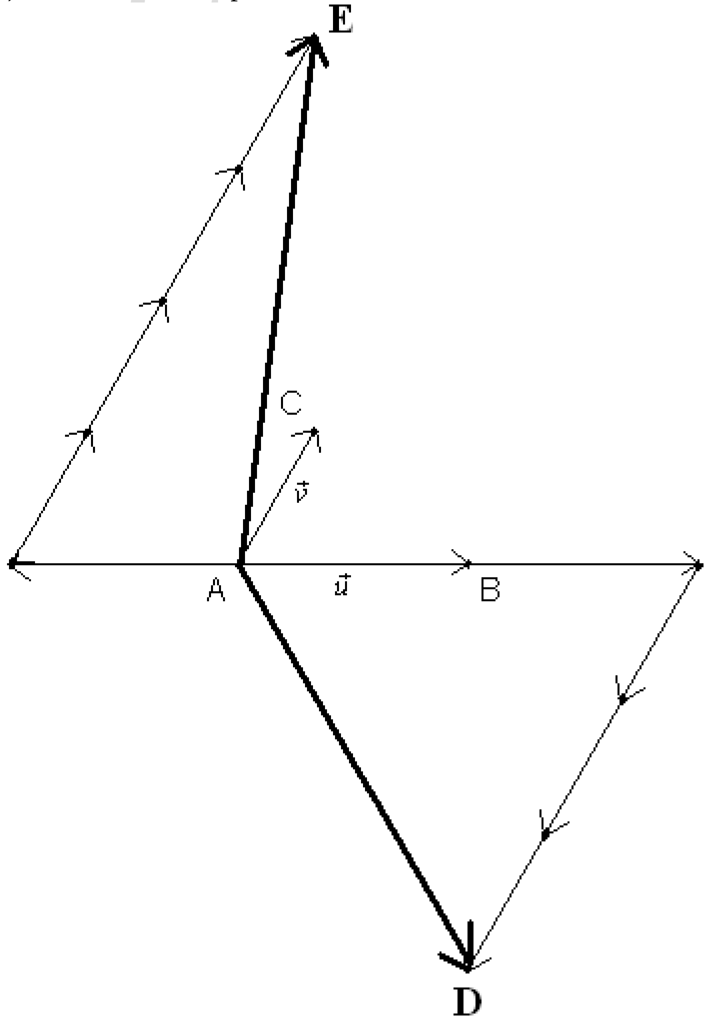
Les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont donc orthogonaux

Exercice n°5

1) Le calcul de $\vec{u}\cdot\vec{v}$ s'effectue directement à l'aide des données de l'énoncé :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{(\vec{u};\vec{v})}\right)=\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos\left(\widehat{BAC}\right)=3\times2\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\times2\times\frac{1}{2}\boxed{=3}$$

2) Construction des points D et E :



3) On utilise les « identités remarquables » et la districution du produit scalaire :

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=(2\vec{u}-3\vec{v})\cdot(2\vec{u}-3\vec{v})=(2\vec{u}-3\vec{v})^2=\|2\vec{u}\|^2-2\times2\vec{u}\cdot3\vec{v}+\|3\vec{v}\|^2$

$=4\|\vec{u}\|^2-12\vec{u}\cdot\vec{v}+9\|\vec{v}\|^2=4AB^2-12\vec{u}\cdot\vec{v}+9AC^2=4\times3^2-12\times3+9\times2^2$

$=36-36+36\boxed{=36}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=(2\vec{u}-3\vec{v})\cdot(-\vec{u}+4\vec{v})$

$=2\vec{u}\cdot(-\vec{u})+2\vec{u}\cdot4\vec{v}-3\vec{v}\cdot(-\vec{u})-3\vec{v}\cdot4\vec{v}$

$=-2\|\vec{u}\|^2+8\vec{u}\cdot\vec{v}+3\vec{v}\cdot\vec{u}-12\|\vec{v}\|^2$

$=-2AB^2+11\vec{u}\cdot\vec{v}-12AC^2$

$=-2\times9+11\times3-12\times4$

$=-18+33-48=33-66\boxed{=-33}$

GUESMI.B

Enfin,

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AE}=\left(-\vec{u}+4\vec{v}\right)\cdot\left(-\vec{u}+4\vec{v}\right)=\left(-\vec{u}+4\vec{v}\right)^2=\left\|-\vec{u}\right\|^2+2\times\left(-\vec{u}\right)\cdot 4\vec{v}+\left\|4\vec{v}\right\|^2$

$=\left\|\vec{u}\right\|^2-8\vec{u}\cdot\vec{v}+16\left\|\vec{v}\right\|^2=AB^2-8\vec{u}\cdot\vec{v}+16AC^2=3^2-8\times 3+16\times 2^2$

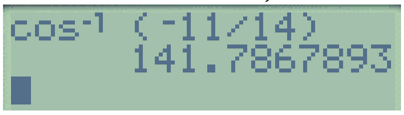
$=9-24+64\boxed{=49}$

4) En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$ d'une deuxième manière, on obtiendrait $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\left\|\overrightarrow{AE}\right\|\cos\left(\widehat{DAE}\right)$

Puisque $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=-33$, $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=36$, on obtient $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\sqrt{36}=6$ et de même $\left\|\overrightarrow{AE}\right\|=\sqrt{49}=7$

L'égalité $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\left\|\overrightarrow{AE}\right\|=\cos\left(\widehat{DAE}\right)$ fournit donc $\cos\left(\widehat{DAE}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\left\|\overrightarrow{AE}\right\|}=\dfrac{-33}{6\times 7}=-\dfrac{33}{42}=-\dfrac{11}{14}$

Grâce à la calculatrice, on déduit que l'angle $\widehat{DAE}$ mesure environ 141,8 ° (à 0,1 degré près)



Exercice n°6

1) Le point C se projete orthogonalement en D sur (AD), de sorte que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=AD^2\boxed{=25}$

On « réarrange » le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC}$ avant de le calculer :

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC}=\left(-\overrightarrow{CA}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{CD}\right)=(-1)\times(-1)\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}$

Le point A se projette orthogonalement en D sur (CD), de sorte que $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CD}=CD^2\boxed{=64}$

On applique la relation de Chasles et la distributivité du produit scalaire pour calculer :

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

Le point C se projette orthogonalement en B sur (AB), de sorte que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2=64$

Ainsi $-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=-64+25=-39$

On conclut ainsi que $\boxed{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-39}$

2) On calcule de deux manière différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

D'une part, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{1}{4}\left(-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BD}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$

On a déjà calculé $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-39$, donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\dfrac{39}{4}$

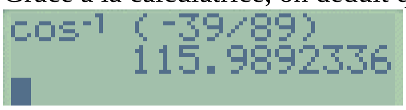
D'autre part $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\left\|\overrightarrow{OB}\right\|\cos\left(\widehat{AOB}\right)$

D'après le théorème de Pythagore, la diagonale AC du rectangle mesure $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{8^2+5^2}=\sqrt{89}$, donc les demi diagonales mesurent $OA=OB=\frac{1}{2}\sqrt{89}$

Ainsi $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\sqrt{89}\times\frac{1}{2}\sqrt{89}\cos(\alpha)=\frac{89}{4}\cos(\alpha)$

En égalant les deux expression du produit scalaire, on obtient $\frac{89}{4}\cos(\alpha)=-\frac{39}{4}\Leftrightarrow\cos(\alpha)=-\frac{39}{89}$

Grâce à la calculatrice, on déduit que l'angle $\widehat{AOB}$ mesure environ 116 ° (à 1 degré près)



3)

On calcule de deux manière différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}$

D'une part, le point D se projete orthogonalement en K sur (AO). Ainsi $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AK}$, et puisque les vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires de même sens, $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AK}=AO\times AK=\frac{1}{2}\sqrt{89}AK$

D'autre part $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{25}{2}$

En égalant les deux expressions du produit scalaire $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}$, on obtiendra $\frac{1}{2}\sqrt{89}AK=\frac{25}{2}\Leftrightarrow\boxed{AK=\frac{25}{\sqrt{89}}}$

Par symétrie, on déduit la valeur de HC : $HC=\frac{25}{\sqrt{89}}$

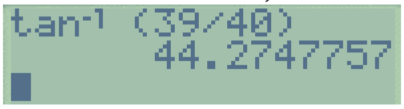
On calcule alors HK=AC-(AK+HC), c'est-à-dire $HK=\sqrt{89}-2\times\frac{25}{\sqrt{89}}=\frac{89-50}{\sqrt{89}}\boxed{=\frac{39}{\sqrt{89}}}$

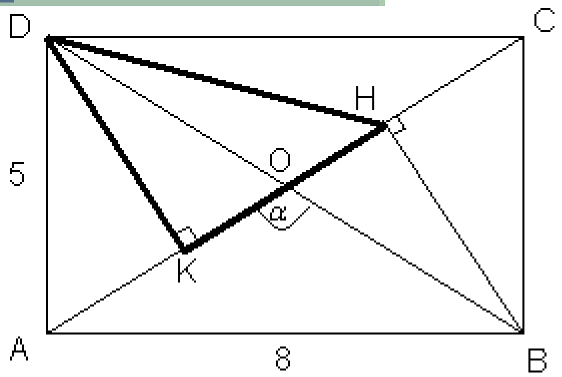
4) Dans le triangle HDK rectangle en K, on calcule $\tan\left(\widehat{HDK}\right)=\frac{HK}{DK}$

On calcule la longueur DK en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AKD rectangle en K :

$DK^2=AD^2-AK^2=25-\left(\frac{25}{\sqrt{89}}\right)^2=\frac{1600}{89}$ donc $DK=\sqrt{\frac{1600}{89}}=\frac{40}{\sqrt{89}}$, et on termine de calculer $\tan\left(\widehat{HDK}\right)=\frac{\frac{49}{\sqrt{89}}}{\frac{40}{\sqrt{89}}}=\frac{39}{40}$

Grâce à la calculatrice, on déduit que l'angle $\widehat{HDK}$ mesure environ 44 ° (à 1 degré près)





Exercice n°7

1) On calcule directement le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ en utilisant les donées de l'énoncé :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cos\left(\widehat{BAC}\right)=6\times5\times\cos(60°)=6\times5\times\frac{1}{2}=15$

On calcule BC en utilisant la formule d'Al Kashi :

$BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6^2+5^2-2\times15=31$ donc $\boxed{BC=\sqrt{31}\ cm}$

2) On calcule directement le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ en utilisant les donées de l'énoncé :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cos\left(\widehat{BAC}\right)=7\times4\times\cos(120°)=7\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-14$

On calcule BC en utilisant la formule d'Al Kashi :

$BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=7^2+4^2-2\times(-14)=93$ donc $\boxed{BC=\sqrt{93}\ cm}$

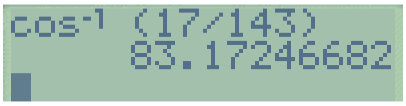
Exercice n°8 (énoncé)

On utilise la formule d'Al Kashi :

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\left(\widehat{A}\right)$. On en déduit donc la valeur excate de $\cos\left(\widehat{A}\right)$:

$\cos\left(\widehat{A}\right)=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}=\frac{34}{286}=\frac{17}{143}$

Grâce à la calculatrice, on déduit que $\boxed{\text{l'angle } \widehat{A} \text{ mesure environ 83,2 ° (à 0,1 degré près)}}$



De la même manière :

$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \times BC \cos\left(\widehat{B}\right)$ nous permet de calculer $\cos\left(\widehat{B}\right) = \dfrac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA \times BC} = \dfrac{208}{352} = \dfrac{13}{22}$, donc d'en déduire, grâce à la calculatrice, que $\boxed{\widehat{B} \approx 53{,}8°}$ à 0,1° près

Enfin, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \cos\left(\widehat{C}\right)$ nous permet de calculer $\cos\left(\widehat{C}\right) = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \times BC} = \dfrac{304}{416} = \dfrac{19}{26}$, donc d'en déduire, grâce à la calculatrice, que $\boxed{\widehat{C} \approx 43°}$ à 0,1° près

Exercice n°9

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$,

1) Un point $M\left(x;y\right)$ appartient à C_1 si et seulement si $AM = 5$

En utilisant la formule de la distance dans un repère orthonormé, et l'équivalence $AM = 5 \Leftrightarrow AM^2 = 25$, on obtient :

$$M\left(x;y\right) \in C_1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x - x_A\right)^2 + \left(y - y_A\right)^2} = 5 \Leftrightarrow \boxed{\left(x+2\right)^2 + \left(y-1\right)^2 = 25}$$

2) 1ère méthode :

On calcule les coordonnées du centre I du cercle, qui est le milieu de [BC] (donc $x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = 1$ et $y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{1}{2}$), ainsi que le rayon du cercle, qui vaut $\dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(x_C - x_B\right)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(4\right)^2 + \left(-3\right)^2} = \dfrac{5}{2}$

On se retrouve dans la situation de la question 1), ou on applique la formule du cours sur l'équation d'un cercle de centre et de rayon connu : $\boxed{\left(x-1\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}}$

2ème méthode :

Un point $M\left(x;y\right)$ appartient à C_2 si et seulement si $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

On détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MB}\left|\begin{matrix} -1-x \\ 2-y \end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{MC}\left|\begin{matrix} 3-x \\ -1-y \end{matrix}\right.$

La condition $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ se traduit alors par :

$$\left(-1-x\right)\left(3-x\right) + \left(2-y\right)\left(-1-y\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3 + x - 3x + x^2 - 2 - 2y + y + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - y = 5$$

On « transforme » cette expression pour obtenir :

$$x^2 - 2x + y^2 - y = 5$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 - 1 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 5$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(x-1\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}}$$

On retrouve le résultat précédémment établi

3) On transforme l'équation de E_3 :

$$x^2+y^2+7x-8y+8=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+(y-4)^2-16+8=0$$

$$\Leftrightarrow\boxed{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+(y-4)^2=\frac{81}{4}}$$

On identifie E_3 comme étant le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{7}{2};4\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{9}{2}$

4) On transforme l'équation de E_4 :

$$x^2+y^2+6x-10y+34=0$$

$$\Leftrightarrow(x+3)^2-9+(y-5)^2-25+34=0$$

$$\Leftrightarrow(x+3)^2+(y-5)^2=0$$

Cette dernière égalité n'est possible que si et seulement si $\begin{cases}(x+3)^2=0\\ \text{et }(y-5)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\ y=5\end{cases}$

L'ensemble E_4 est donc réduit au seul point S de coordonnées S(-3 ;5)

(on peut aussi voir cet ensemble comme le cercle de centre S et de rayon égal à zéro !)

Exercice n°10

1) On transforme l'équation de E :

$$x^2+y^2-4x+2y-5=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)^2-4+(y+1)^2-1-5=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+1)^2=10$$

On identifie E comme étant le cercle de centre $\Omega(2;-1)$ et de rayon $\sqrt{10}$

Pour étudier l'intersection du cercle E et de la droite (d) d'équation $x-2y+1=0$, cherchons les couples $(x;y)$ solutions du système $\begin{cases}x^2+y^2-4x+2y-5=0 & L_1\\ x-2y+1=0 & L_2\end{cases}$

On résout ce système par substitution, en utilisant la ligne L_2 pour écrire $x-2y+1=0\Leftrightarrow x=2y-1$

On remplace, dans la ligne L_1 , x par $2y$-1, et on obtient une équation du second degré à une inconnue y :

$$(2y-1)^2+y^2-4(2y-1)+2y-5=0$$

$$\Leftrightarrow 4y^2-4y+1+y^2-8y+4+2y-5=0$$

$$\Leftrightarrow 5y^2-10y=0$$

$$\Leftrightarrow 5y(y-2)=0$$

Les solutions de cette équation sont $y=0\Rightarrow x=-1$ et $y=2\Rightarrow x=3$

Les points d'intersection de E et (d) sont les points A et B de coordonnées A(-1 ;0) et B(3 ;2)

2) On transforme l'équation de E_1 :

$$x^2+y^2+2x-4y-13=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)^2-1+(y-2)^2-4-13=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=18$$

On identifie E_1 comme étant le cercle de centre $\Omega_1(-1;2)$ et de rayon $\sqrt{18}$

On transforme l'équation de E_2 :

$$x^2+y^2-6x+4y+11=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2-9+(y+2)^2-4+11=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=2$$

On identifie E_2 comme étant le cercle de centre $\Omega_2(3;-2)$ et de rayon $\sqrt{2}$

Pour étudier l'intersection des deux cercles E_1 et E_2, cherchons les couples $(x;y)$ solutions du système

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-4y-13=0 & L_1 \\ x^2+y^2-6x+4y+11=0 & L_2 \end{cases}$$

En soustrayant les deux lignes, il vient $\begin{cases} 8x-8y-24=0 & L_1-L_2 \\ x^2+y^2-6x+4y+11=0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-3=0 & L_1-L_2 \\ x^2+y^2-6x+4y+11=0 & L_2 \end{cases}$

On résout ce système par substitution, en utilisant la première ligne pour écrire $x-y-3=0 \Leftrightarrow x=y+3$

On remplace, dans la deuxième ligne, *x* par *y*+3, et on obtient une équation du second degré à une inconnue *y* :

$$(y+3)^2+y^2-6(y+3)+4y+11=0$$

$$\Leftrightarrow 2y^2+4y+2=0 \Leftrightarrow y^2+2y+1=0 \Leftrightarrow (y+1)^2=0$$

Cette équation admet une unique solution $y=-1 \Rightarrow x=2$

Les deux cercles n'admettent qu'un seul point d'inetrsection : le point A(2 ;-1). Ils sont tangents en ce point.

Exercice n°11

Pour démontrer que (HI) et (HJ)sont perpendiculaires, calculons le produit scalaire $\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HJ}$

On utilise la relation de Chasles et la distributivité du produit scalaire :

$$\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HJ}=\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AI}\right)\cdot\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AJ}\right)$$

$$=\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{HA}+\underbrace{\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}}_{\substack{0 \text{ car le triangle ABC} \\ \text{est rectangle en A}}}$$

$$=HA^2-\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AI}$$

$$=HA^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$$

car I et J sont les milieux respectifs de [AB]et [AC]

Puisque le point C se projette orthogonalement en H sur [AH] et puisque le point B se projette orthogonalement en H sur [AH], on a $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH}=AH^2$ et de même $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH}=AH^2$

Le produit scalaire $\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HJ}$ vaut donc $\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HJ}=HA^2-\frac{1}{2}AH^2-\frac{1}{2}AH^2=0$, ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{HJ}$ sont orthogonaux, donc que les droites (HI) et (HJ)sont perpendiculaires

Exercice n°12

1) Une première expression de $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$ est $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=\left\|\overrightarrow{AI}\right\|\left\|\overrightarrow{AJ}\right\|\cos\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}\right)$

En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles ABI et ADJ rectangles en B et D, on établit que :

$$AJ=AI=\sqrt{AB^2+BI^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Ainsi $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=\frac{a\sqrt{5}}{2}\times\frac{a\sqrt{5}}{2}\cos\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}\right)=\boxed{\frac{5a^2}{4}\cos(\theta)}$

2) a) En utilisant la relation de Chasles, on écrit $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \boxed{\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}$ et

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}$

b) En utilisant les deux expressions ci-dessus et la distributivité du produit scalaire, on établit que¨:

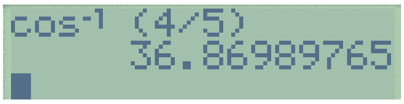
$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}_{\substack{0 \text{ car ABCD}\\ \text{est un carré}}} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}_{\substack{0 \text{ car ABCD}\\ \text{est un carré}}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 \boxed{= a^2}$$

3) En égalant les deux expressions de $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$, on obtient $\frac{5a^2}{4}\cos(\theta) = a^2 \Leftrightarrow \boxed{\cos(\theta) = \frac{4}{5}}$

En utilisant la calculatrice, on obtient une valeur approchée à 10^{-2} près de θ :

$\boxed{\theta \approx 36{,}87°}$



Exercice n°13

1) On calcule les coordonnées du centre I du cercle *C*, qui est le milieu de [AB] (donc $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 2$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 2$), ainsi que le rayon du cercle, qui vaut :

$$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \frac{\sqrt{100}}{2} = 5$$

L'équation de *C* est donc : $\boxed{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25}$

2) Le point D appartient à *C* si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de *C*

On calcule $(x_D - 2)^2 + (y_D - 2)^2 = (-1-2)^2 + (6-2)^2 = (-3)^2 + 4^2 = 25$, donc $\boxed{\text{D est un point de } C}$

Un vecteur normal à la tangente T à *C* au point D est le vecteur $\overrightarrow{ID}\left|\begin{array}{l} x_D - x_I = -1-3 = -4 \\ y_D - y_I = 6-3 = 3 \end{array}\right.$

Une équation cartésienne de *T* est donc $ax + by + c = 0$ avec $\overrightarrow{ID}\left|\begin{array}{l} -4 = a \\ 3 = b \end{array}\right.$, donc de la forme $-4x + 3y + c = 0$. On utilise les coordonnées du point D pour calculer le coefficient *c* :

$-4x_D + 3y_D + c = 0 \Leftrightarrow c = 4x_D - 3y_D = 4\times(-1) - 3\times 6 = -22$ Une équation de *T* est donc $\boxed{-4x + 3y - 22 = 0}$

Exercice n°14

1) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A = 1 \\ y_B - y_A = -1 \\ z_B - z_A = 1 \end{array}\right.$, $\overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l} x_C - x_A = -2 \\ y_C - y_A = 1 \\ z_C - z_A = 0 \end{array}\right.$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel *k* unique satisfaisant aux trois conditions $\begin{cases} k = -2 \\ -k = 1 \\ k = 0 \end{cases}$. Les points A,B et C ne sont donc pas alignés, donc définissent un plan (ABC).

b) Notons $\vec{n}(a;b;c)$ les coordonnées d'un vecteur normal à (ABC).

Puisque $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = 0$, on a $1\times a + (-1)\times b + 1\times c = 0 \Leftrightarrow a - b + c = 0$

Puisque $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n} = 0$, on a $(-2)\times a + 1\times b + 0\times c = 0 \Leftrightarrow -2a + b = 0$

Le système $\begin{cases} a-b+c=0 \\ -2a+b=0 \end{cases}$ de deux équations à trois inconnues admettant une infinité de solutions, on doit « fixer arbitrairement » une valeur pour l'une quelconque des inconnues. L'énoncé nous conseille de choisir a=1

Le système devient alors $\begin{cases} a=1 \\ 1-b+c=0 \\ -2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=b-1=1 \\ b=2 \end{cases}$. Un vecteur normal à (ABC) est donc $\vec{n}\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$.

c) Une équation du plan (ABC) est alors $x+2y+z+d=0$. On détermine d en utilisant les coordonnées de l'un des points de ce plan, par exemple A(2 ;1 ;1). On obtient $x_A+2y_A+z_A+d=0 \Leftrightarrow d=-x_A-2y_A-z_A=-2-2-1=-5$

Une équation du plan (ABC) est alors $\boxed{x+2y+z-5=0}$.

2) Une équation de (ABC) étant de la forme $ax+by+cz=d$, les coordonnées de A,B et C vériant cette équation de droite, nous permettent de dresser le système de trois équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} ax_A+by_A+cz_A+d=0 \\ ax_B+by_B+cz_B+d=0 \\ ax_C+by_C+cz_C+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+c+d=0 \\ 3a+2c+d=0 \\ 2b+c+d=0 \end{cases}$$

Ce système admettant une infinité de solutions, on doit « fixer arbitrairement » une valeur pour l'une quelconque des inconnues. On fixe par exemple a = 1 Le système devient :

$$\begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ 2b+c+d=0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ -c-d=4 & L_4=L_3-2L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ c=1 & L_4+L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2-c-d=2 & L_1 \\ d=-3-2c=-5 & L_2 \\ c=1 & L_4+L_2 \end{cases}$$

On retrouve alors l'équation $\boxed{x+2y+z-5=0}$

<u>Exercice n°15</u>

1) P et P' admettent pour vecteurs normaux les vecteurs $\overrightarrow{n_1}(\cos t;\sin t;-1)$ et $\overrightarrow{n_2}(\cos t;\sin t;+1)$.

Le produit scalaire $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=(\cos t)(\cos t)+(\sin t)(\sin t)+(-1)(1)=(\cos t)^2+(\sin t)^2-1=1-1=0$ nous permet d'affirmer que les plans P et P' sont perpendiculaires.

2) l'axe Ox est parallèle à P pour toutes les valeurs de t pour lesquelles $\overrightarrow{n_1}(\cos t;\sin t;-1)$, vecteur normal à P sera orthogonal à tout vecteur directeur de l'axe Ox.

Un vecteur directeur de l'axe Ox est $\vec{u}(1;0;0)$. Le produit scalaire $\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{u}=(\cos t)\times1+(\sin t)\times0+(-1)(0)=\cos t$. Pour $t=\frac{\pi}{2}[\pi]$, $\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{u}=\cos t=0$, donc l'axe O$x$ est parallèle à P.

3) Les coordonnées des points de la droite intersection des deux plans vérifient le système $\begin{cases} (\cos t)x+(\sin t)y-z=0 \\ (\cos t)x+(\sin t)y+z=0 \end{cases}$, soit, par soustraction des deux lignes, $\begin{cases} (\cos t)x+(\sin t)y+z=0 \\ 2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos t)x+(\sin t)y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Si $t=\frac{\pi}{2}[\pi]$, puisque $\cos t=0$ et $\sin t=1$, le système est équivalent à $\begin{cases} x=\lambda \\ y=0, \lambda\in\mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$. Un vecteur directeur de la droite intersection des deux plans est $\vec{v}(1;0;0)$

Si $t\neq\frac{\pi}{2}[\pi]$, $\begin{cases} (\cos t)x+(\sin t)y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\lambda\tan t \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$ Un vecteur directeur de la droite intersection des deux plans est $\vec{v}(1;-1;0)$

4) La distance de A(cos t, sin t, -3) au plan P vaut $\frac{|(\cos t)(\cos t)+(\sin t)(\sin t)+3|}{\sqrt{(\cos t)^2+(\sin t)^2+(-1)^2}}=\frac{|1+3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$