Lycee El Hedi Ben Hsin Jendouba	**Devoir de contrôle n° 2** *Mathématiques*	*Classe : 3 ème* T2

Exercice n°1 : *(8 pts)*

Soit f une fonction dérivable sur IR. La courbe C ci-contre est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

La droite D est une asymptote de C au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

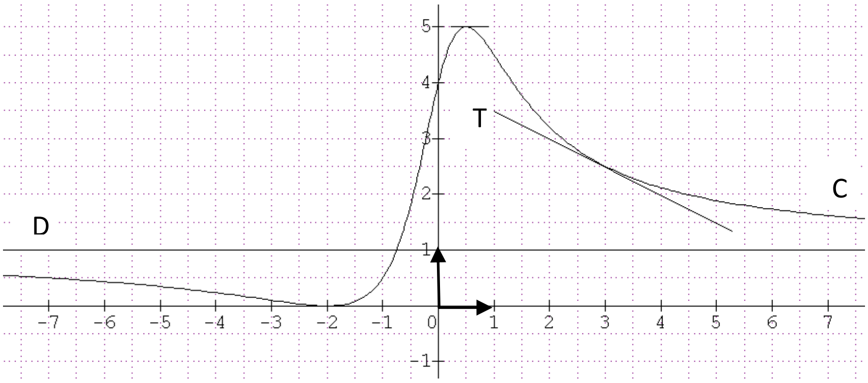
T est la tangente à C au point d'abscisse 3.

1) Déterminer :

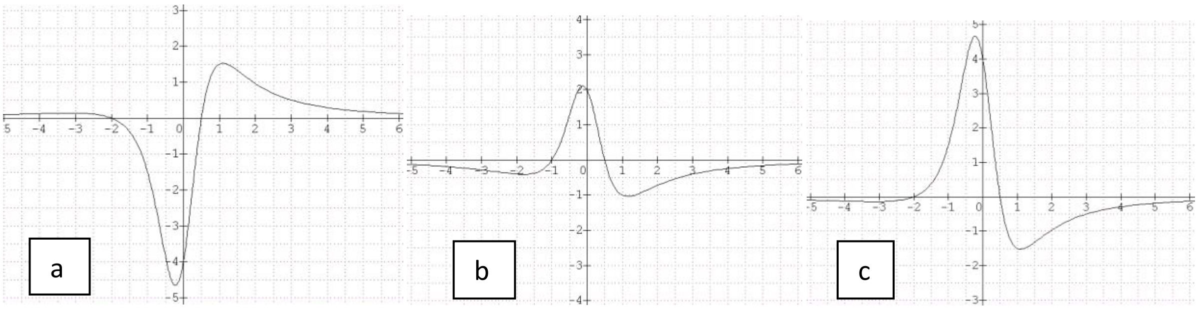
$a/$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$b/$ $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, $f'(-2)$ et $f'(3)$.

$c/$ Une équation de T.



2) L'une de trois courbes a, b et c est la représentation graphique de la fonction dérivée de f. Indiquer laquelle, en justifiant votre choix.



3) On suppose que, pour tout $x \in IR$, $f(x) = \dfrac{x^2+4x+a}{x^2+b}$.
   En utilisant la courbe C, montrer que $a = 4$ et $b = 1$.

4) On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)^2}{x^2+1} & si\ x \leq 3 \\ x^2 - 2x + \alpha & si\ x > 3 \end{cases}$

   $a/$ Déterminer α pour que g soit continue en 3.
   $b/$ Pour la valeur trouvée de α, étudier la dérivabilité de g en 3.
   $c/$ Calculer $g'(x)$, pour $x \in]-\infty\,,3[$ et pour $x \in]3\,,+\infty[$.

5) $a/$ Montrer qu'il existe un point A de C_g d'abscisse x_A dans $[3\,,+\infty[$ où la tangente T_A est parallèle à la droite Δ d'équation : $y = 4x$.
   $b/$ Ecrire une équation de T_A .

Exercice n°2 : **(6 pts)**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère les points $A(1,\sqrt{3})$ *et* $C(-\sqrt{3},1)$.

1) $a/$ Déterminer les coordonnées polaires de A et C.
   $b/$ Placer les points A et C dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
2) Soit B le point défini par : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.
   $a/$ Quelle est la nature du quadrilatère $OABC$? Justifier.
   $b/$ Déterminer les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires de B.
   $c/$ En déduire : $cos\,\frac{7\pi}{12}$ et $sin\,\frac{7\pi}{12}$.

Exercice n°3 : **(6 pts)**

1) Montrer que, pour tout réels a et b on a :
$$sina.cosb = \frac{1}{2}\,[\sin(a+b) + \sin(a-b)].$$
2) On donne : $S = cos\,\frac{2\pi}{5} + cos\,\frac{4\pi}{5} + cos\,\frac{6\pi}{5} + cos\,\frac{8\pi}{5}$.
   Montrer que : $S = 2(cos\,\frac{2\pi}{5} + cos\,\frac{4\pi}{5})$
3) On pose : $P = 2sin\,\frac{\pi}{5} \times S$.
   $a/$ Développer P, et montrer que : $P = -2sin\frac{\pi}{5}$. (Utiliser le résultat de la question 1)).
   $b/$ En déduire que : $S = -1$.
   $c/$ Montrer que $cos\,\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation : $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
   $d/$ En déduire la valeur exacte de $cos\,\frac{2\pi}{5}$.

Bonne chance

CORRECTION (proposee par Guesmi.B)

EXERCICE1

1)a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$

b) f '(1/2)=0 et f '(-2)=0 puisqueles en x=1/2 et x=-2 on a deux tangentes horizontales

soent A(3,5/2) et B(5,3/2) alors f '(3)=$\frac{2,5-1,5}{3-5} = -\frac{1}{2}$

c)T : y=f '(3)(x-3)+f(3)=(-1/2)x+4

2)dans]-
$\infty,-2]$ f *est decroissante donc* $f'(x) \leq 0$, *dans* $\left[-2,\frac{1}{2}\right]$ f *est croissante donc*

$f'(x) \geq 0$*et dans* $[\frac{1}{2},+\infty[$ f *est decroissante donc* $f'(x) \leq 0$

La courbe qui correspond à ces condition est (b)

3)$f'(x) = \frac{-4x^2+2(b-a)x+4b}{(x^2+1)^2}$, *ona* $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ *donc* $5b - a = 1$ *et* $f'(-2) = 0$ *donc* $a =$
4 *donc* $b = 1$

4)a) $\lim_{x\to3^+} g(x) = 3 + \alpha$

Pour que g soit continue en 3 il suffit qu'elle soit continue a droite en 3

Puisqu'elle est continue à gauche en 3

Donc $\lim_{x\to3}(x^2 - 2x + \alpha) = g(3) = \frac{5}{2}$ *alors* $\alpha = -\frac{1}{2}$

b)$g'_d(3) = 4$ *et* $g'_g(3) = -1/2$ donc g n'est pas derivable en 3

5)a)g'(x)=2x-2 soit A($x_A, g(x_A)$)

Pour que $T_A//\Delta$ il suffit que g'$(x_A) = 4$ donc 2x_A-2=4 alors x_A=3 donc A(3 ;5/2)

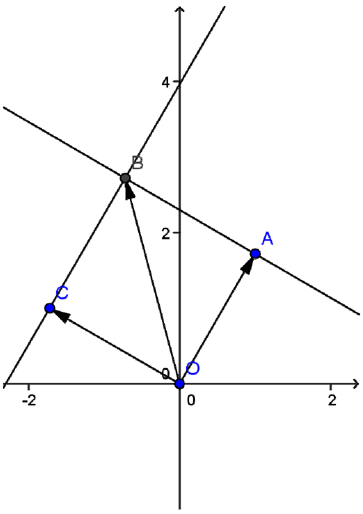
b) T_A :y=4(x-3)+5/2

=4x-19/2

EXERCICE2

$$r = OA = \sqrt{1+3} = 2 \quad et \quad \begin{cases} cosx = \frac{a}{r} = \frac{1}{2} \\ sinx = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} donc\ x = \frac{\pi}{6} \quad alors\ A(2, \frac{\pi}{3})$$

On montre de meme que $C(2, \frac{\pi}{6})$



2)a)$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ *relation du parallelogramme donc OABC est un*

Parallelogramme et puisque OA=OC donc c'est un losange or $\widehat{AOC} = \frac{\pi}{2}$ donc OABC est un carre

b)$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ $donc\ B(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}), r = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2}$

OB=$2\sqrt{2}$

B$(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})$ $donc\ B(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12})$

Donc $cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ $et\ sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Verification cos$(\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = cos\frac{\pi}{3}cos\frac{\pi}{4} - sin\frac{\pi}{3}sin\frac{\pi}{4}$ *de meme pour l'autre*

EXERCICE3

1)sin(a+b)=sina cosb+cosa sinb et que sin(a-b)=sina cosb-cosa sinb

Donc le resultat est evident

2)cos $\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \,et\, \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

D'où le resultat

3)a)P=4 $\left[\sin\frac{\pi}{5} cos\frac{2\pi}{5} + sin\frac{\pi}{5} cos\frac{4\pi}{5}\right] = 4X\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}\right)\right] = -2sin\frac{\pi}{5}$

b)on a :$-2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) XP \; donc \; S = -1$

c) vu que S=-1 donc cos$\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -1/2$

et que 2cos^2(a)-1=cos2a   on obtient le resultat

d) en calculant Δ on trouve deux solutions $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ ou x=$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

mais cos$\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'equation et vu que $\frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2} \; donc \; cos\frac{2\pi}{5} > 0 \;\; d'ou$

$$cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$