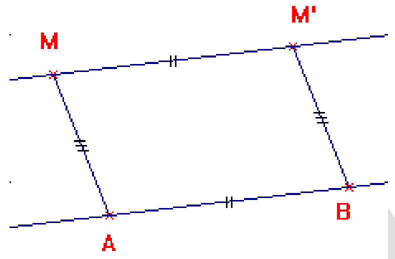
VECTEURS ET TRANSLATION

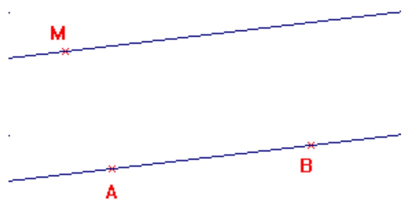
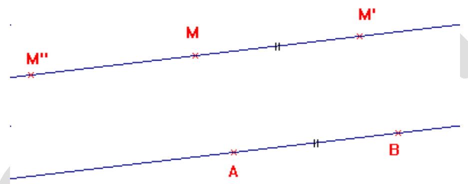
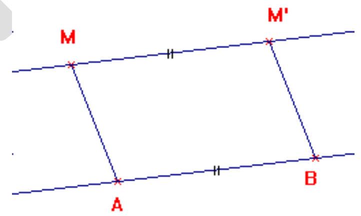
A et B sont deux points donnés.

regarder la figure

<table>
<tr>
<td>On dit qu'un point M' est l'image d'un point M par la translation qui transforme A en B lorsque ABM'M est un parallélogramme.

Attention à l'ordre des points.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Pour construire ce point M', il faut :

<table>
<tr>
<td>(MM') parallèle à (AB).
</td>
<td>[MM'] de la même longueur que [AB] ce qui laisse un deuxième point possible, M''.
</td>
<td>Choisir le sens de A vers B pour éliminer le point M''.
</td>
</tr>
</table>

1. Définition

Pour dire qu'un point **M'** **est l'image d'un point M par la translation qui transforme A en B,**

On dit que **M'** **est l'image du point M par la translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$.

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc défini par trois caractères :

Sa direction	Sa longueur	Son sens
Parallèle à la droite (AB)	Même longueur que le segment [AB]	Sens de A vers B

2. Egalité vectorielle

Deux vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens, même longueur.

On écrit alors $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

3. Vecteurs et milieu d'un segment

Soit I le milieu d'un segment [AB].

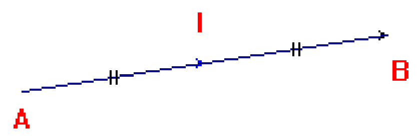
On a alors immédiatement : (AI) // (IB) ; AI = IB et le même sens de A vers I que de I vers B.

Autrement dit on a la

a. propriété 1 : **si I le milieu d'un segment [AB],** $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Réciproquement, on a aussi la

b. Propriété 2 : **si** $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ **, alors I le milieu d'un segment [AB].**



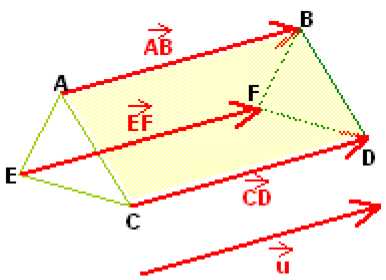
Exercice montrer $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0})$ $signifie(I\ est\ le\ milieu\ de\ [AB]$

4. Vecteurs et parallélogramme

a. Propriété 1 : si $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, (alors ABCD est un parallélogramme et ses diagonales …) **[AC] et [BD] ont le même milieu.**

b. Propriété 2 : **Si [AC] et [BD] ont le même milieu**, (alors ABCD est un parallélogramme) alors $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

point		image
A	$\mapsto$	B
C	$\mapsto$	D
E	$\mapsto$	F



Lien entre translations et vecteurs

Propriété 1

- si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors la translation qui transforme A en B transforme C en D
- si la translation qui transforme A en B transforme C en D alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

- les quatre flèches de la figure sont(parallèles), ont le même sens et la même longueur. On résume en écrivant :

$$\vec{u} = \vec{AB} = \vec{CD} = \vec{EF}$$

- $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ et $\vec{EF}$ sont des représentants d'un *même vecteur* qui définit la *même translation.*

- A est l'origine du vecteur $\vec{AB}$ et B est l'extrémité du vecteur $\vec{AB}$.

✔ Plus simplement, on peut se dire q'un vecteur est représenté par une flèche. Toutes les flèches parallèles, qui ont le même sens et la même longueur représente le même vecteur.

✔ Un vecteur particulier : le vecteur nul

Considérons maintenant la translation qui transforme un point A en le point A lui-même. Cette translation consiste à n'effectuer aucun mouvement. Par cette translation, tous les autres points sont immobiles, et sont leur propre image. On peut résumer par le schéma :

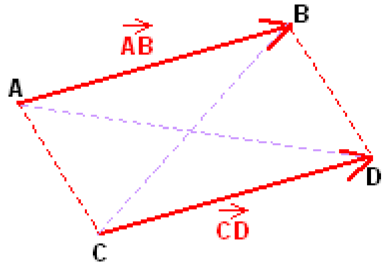
point		image
A	$\longmapsto$	A
C	$\longmapsto$	C
E	$\longmapsto$	E

Le vecteur qui définit cette translation (l'immobilité) n'a donc pas de longueur.

On le note $\vec{0}$. Ainsi :

$$\vec{0} = \vec{AA} = \vec{CC} = \vec{EE}$$

* Définitions de vecteur dans le langage courant : ce qui véhicule quelque chose - animal, plante qui sert de support à la transmission de maladies épidémiques - tout véhicule aéronautique capable de transporter une arme en vue de la lancer sur un objectif.



Liens entre milieux et vecteurs

Propriété 3

- si $\vec{AB} = \vec{CD}$ alors les segments [AD] et [BC] ont le même milieu
- si les segments [AD] et [BC] ont le même milieu, alors $\vec{AB} = \vec{CD}$ et $\vec{AC} = \vec{BD}$

✔ Finalement, on peut retenir que les 4 phrases suivantes veulent dire la même chose :

- $\vec{AB} = \vec{CD}$
- la translation qui transforme A en B transforme C en D
- ABDC est un parallélogramme
- $\vec{AC} = \vec{BD}$

Ces propriétés sont évidentes si on se souvient des propriétés du parallélogramme.

Relation de Chasles

Définition : On dit que **le vecteur** $\overrightarrow{AC}$ est la **somme des vecteurs** $\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{BC}$.	On écrit : Pour tout point A, B et C du plan $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Cette relation est connue sous le nom de **relation de Chasles.**

Cas particuliers : Si C = A .

La relation devient $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est un vecteur de longueur nulle, et il n'a pas de direction.

On le note $\overrightarrow{O}$ et on l'appelle vecteur nul.

On a alors pour tout point du plan : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{O}$.

Définition : Pour tous points A et B on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{O}$.

on dit que $\overrightarrow{BA}$ est un **vecteur opposé** au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On note : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

c. Règle du parallélogramme

Propriété : La **somme des vecteurs** $\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{AC}$ **est le vecteur** $\overrightarrow{AD}$ **où D est le quatrième sommet du parallélogramme ABDC.**

Il est clair en effet que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont égaux et qu'on a alors :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} .$$