Serie(1)

Exercice 1

La fonction f est définie sur les entiers positifs et prend ses valeurs sur $\mathbb{N}$.
$f(2) = 0$, $f(3) > 0$ $f(9999) = 3333$ et pour tout entiers m et n ≥ 0 , $f(m+n) - f(m) - f(n) = 0$ ou 1.
Déterminer f(1982).

Exercice 2

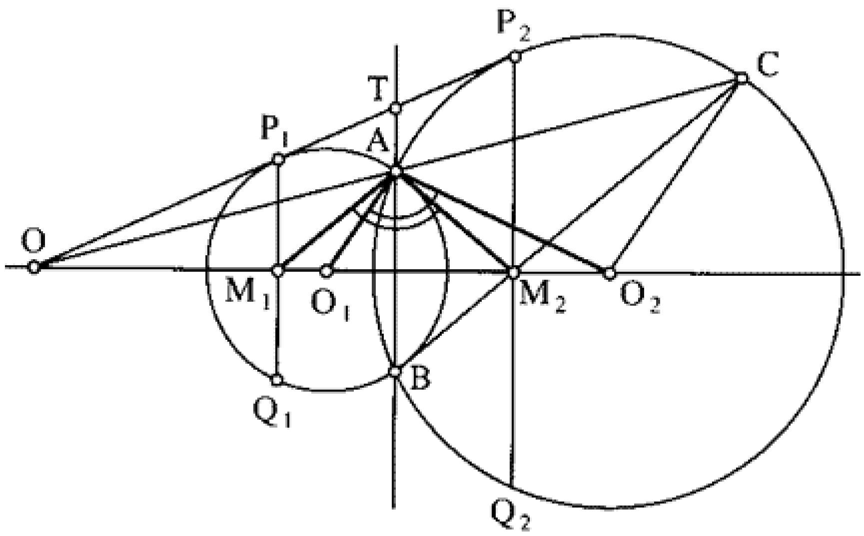
$A_1A_2A_3$ est un triangle non-isocèle dont on note a_i le côté opposé à A_i.
M_i est le milieu du côté a_i et T_i est le point de contact entre entre le cercle inscrit au triangle et le côté a_i.
On appelle S_i le symétrique de T_i (*...symétrie orthogonale*) par rapport à la bissectrice intérieure de l'angle en A_i.
Montrer que les droites (M_1S_1) , (M_2S_2) et (M_3S_3) sont concourantes.

Serie(2)

Exercice 2:

Dans le plan, on se donne deux cercles C_1 et C_2 de centres respectifs O_1 et O_2
Soit A un de leurs points commun. Les points de contact des tangentes aux deux cercles sont P_1, sur C_1 et P_2, sur C_2, pour une des tangentes, et Q_1, sur C_1, et Q_2, sur C_2, pour l'autre tangente.
On noté M_1 et M_2 les milieux respectifs des segments $[P_1Q_1]$ et $[P_2Q_2]$.
Montrez que les angles O_1AO_2 et M_1AM_2 sont isométriques

Correction



O est le point de concours des tangentes communes aux deux cercles.
C'est aussi le centre de l'homothétie h telle que: $h(C_1) = C_2$

B est l'autre point d'intersection des deux cercles.

T est le point d'intersection des droites (AB) et (P_1P_2)) .

C l'autre point d'intersection de (OA) avec C_2 .

On démontre alors les relations suivantes: $TP_2 = TA.TB = TP_2^2$

On vérifie alors que la droite (AB) est la médiatrice de $[M_1,M_2]$.

Les angles $\widehat{O_2M_2C}$et $\widehat{O_1M_1C}$sont égaux, par l'homothétie h, donc égaux aux angles $\widehat{M_1M_2A}$ et$\widehat{M_1M_2B}$.

De là, on peut voir que les points C , M_1 et B sont alignés.

Tout revient donc à montrer que les angles $\widehat{O_2CM_2}$ et $\widehat{O_1AM_1}$ sont égaux.

Mais,

$\widehat{O_1AM_1} = h(\widehat{O_2CM_2})$ mais le triangle O_2BC est isocele donc $\widehat{O_1AM_1} = \widehat{O_2}BM_2$

$\widehat{O_1AM_1} = \widehat{O_2BM_2}$ par raison de symétrie par rapport à (O_1O_2)

D'où le résultat

Exercice3

(x_n) est une suite infinie de nombres réels positifs telle que $x_0 = 1$ and $x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \ldots$
.

1. Montrer qu'il existe $n \geq 1$, tel que: $\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3{,}999$
2. Déterminer une telle suite telle que $\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4 \text{ pour tout } n$

Exercice4

Un cercle, dont le centre est situé sur le côté [AB] d'un quadrilatère convexe ABCD, est tangent aux trois autres côtés.
Montrez que, si le quadrilatère ABCD es inscriptible, alors: AD + BC = AB

Serie3

Exercice1

Soit un triangle ABC. Un cercle de centre O passe par les points A et C et recoupe les segments [AB] et [BC] en deux points distincts K et N.
On suppose que les cercles circonscrits aux triangles ABC et KBN se rencontrent en deux points distincts B et M.

Montrez que le triangle OMB est rectangle en M

Exercice2

Soit M un ensemble de 1985 entiers distincts strictement positifs, ayant tous leurs diviseurs premiers inférieurs ou égaux à 26.

Montrez que l'on peut trouver 4 éléments distincts de M dont le produit est la puissance quatrième d'un entier

Exercice3

Soit trois cercles de même rayon ayant un point commun O et qui sont tous trois intérieurs à un triangle ABC de telle sorte que chaque cercle est tangent à deux des côtés du triangle.
Montrez que le centre du centre inscrit, le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et le point O sont alignés

Correction

On pose O_1, O_2 et O_3 les centres des trois cercles. On a alors:

- $OO_1 = OO_2 = OO_3$ donc O est le centre du cercle passant par les trois points O_1, O_2 et O_3.
- (AO_1), (BO_2) et (CO_3) sont les bissectrices des angles du triangle ABC en A, B et C.
- donc le centre du cercle inscrit au triangle ABC est le centre de l'homothétie qui transforme respectivement O_1, O_2, O_3 en A, B, C

serie4

exercice1

Déterminez toutes les fonctions f de l'ensemble des réels strictement positifs dans lui-même, qui vérifient les conditions suivantes:

1) pour tous réels strictement positifs x , y : $f(xf(y)) = yf(x)$;

2) $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+ \infty$

Correction

On note Id l'application identité sur les réels strictement positif. ($Id(x) = x$)

La première condition permet d'écrire, en composant par f, que pour x et $y > 0$, on a :

$$f(f(xf(y))) = f(yf(x)) = xf(y)$$

En prenant $y = 1$, on obtient alors que pour tout $x>0$,$f(f(xf(1))) = xf(1)$.
Comme f(1) est >0, on a donc : fof = Id .

D'où, toujours en utilisant la première condition, $f(xf(f(y))) = f(y)f(x)$ et $f(f(y)) = y$.
et donc $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous x , y >0 (relation 1)

On vérifie sans problème que toute application vérifiant (1) vérifie aussi la première condition.

On remarque alors que f(1)=1. (prendre $x = y = 1$ dans (1)), que
$f(x^n)=f(x)^n$ pour n entier relatif (prendre d'abord le cas n entier >0 et faire une récurrence puis utiliser $\frac{x}{x} = 1$ dans la relation (1))

De plus, toujours en utilisant la première condition , en prenant $x = y$, on obtient :
$f(xf(x)) = xf(x)$.
C'est à dire que pour tout x >0, $xf(x)$ est un point fixe de f.

Or, pour x >1 , la limite de $f(x^n)=(f(x))^n$ est nul si n tend vers $+\infty$.
Donc on a pour tout $x>0$, $f(x)$ strictement compris entre 0 et 1.

De même, on vérifie que pour tout x compris strictement entre 0 et 1, on a $1 < f(x)$.

Donc, pour tout x >0 et différent de 1, on a $f(x) \neq x$ et donc le seul point fixe de f est 1.

Comme pour tout $x>0$, $x\mathrm{f}(x)$ est un point fixe de f, on en déduit que $x\mathrm{f}(x)=1$,

ou encore $\mathrm{f}(x)=\dfrac{1}{x}$ pour tout $x>0$.

Conclusion:

La seule application répondant à la question est f définie par : pour tout $x>0$

$$\mathrm{f}(x)=\frac{1}{x}$$

Exercice2

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. La bissectrice intérieure de l'angle A coupe le côté [BC] en L et recoupe le cercle circonscrit au triangle en N.

On désigne respectivement par K et M les projections orthogonales de L sur les côtés [AB] et [AC]

Montrez que l'aire du quadrilatère AKNM et l'aire du triangle ABC sont égales.

Exercice3

Soient a, b et c des nombres réels positifs vérifiant $abc=1$.

Montrer : $\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)}\geq\dfrac{3}{2}$.

Exercice3

Soit p un nombre premier impair. Trouver le nombre de sous-ensembles A de l'ensemble $\{1, 2, ., 2p\}$ tels que :

a) A contient exactement p éléments ;

b) la somme de tous les éléments de A est divisible par p.

Exercice4

Dans un quadrilatère convexe $ABCD$, les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires et les côtés (AB) et (CD) ne sont pas parallèles. Les médiatrices des $[AB]$ et $[DC]$ se coupent en P, à l'intérieur de $ABCD$.

Montrez que les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si les aires des triangles ABP et CDP sont égale

Serie5

Exercice1

Dans un concours, il y a *a* concurrents et *b* juges (*b* est impair et supérieur ou égal à 3). Chaque juge attribut à chaque participant la mention " *admis* " ou " *recalé* ".

Soit *k* un nombre tel que les mentions attribuées par deux juges quelconques coïncident au plus pour *k* participants (quels que soient les deux juges).

Montrez que $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$

Correction

Appelons N le nombre de triplets (juge, juge ,concurrent) pour lesquels les deux juges donnent la même appréciation sur le candidat.
Il y a $b(b-1)/2$ couples de juges distincts au total et au plus k candidats ayant la même appréciation pour deux juges, donc, on a:

$$N \leq k.b.(b-1).$$

Si X est un candidat fixé, et estimons le nombre de pairs de juges donnant la même appréciation sur X.
Supposons que n juges admettent X. Alors on a $n(n-1)/2$ couples de juges admettant X et
$(b-n)(b-n-1)/2$ qui refusent X.
Donc, au total, $n(n-1)/2+(b-n)(b-n-1)/2$ couples qui ont la même appréciation sur X.
Mais

$$\begin{aligned}[n(n-1) + (b-n)(b-n-1)]/2 &= [2n^2-2bn+b^2-b]/2 \\ &= [n-b/2]^2 - b^2/4-b/2 \\ &\geq b^2/4 - b/2 = (b-1)^2/4-1/4.\end{aligned}$$

Comme b est impair, $(b-1)^2/4$ est entier.
Donc, le nombre de couples de juges ayant la même appréciation sur X est au moins ègal à

$$(b-1)^2/4.$$

Donc, $N \geq a(b-1)^2/4$.

Des deux inégalités : $N \leq kb$ et $N \geq a(b-1)^2/4$, on en déduit que :

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

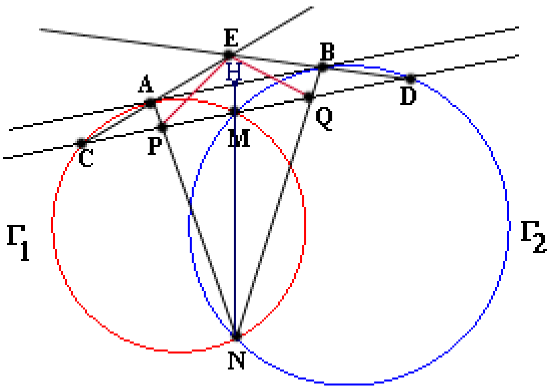
En fait, c'est une inégalité assez "large" que l'on obtient

Exercice2

Deux cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en M et N.
Soit L la tangente commune aux deux cercles telle que M soit plus proche de L que N.
La droite L est tangente à Γ_1 en A et à Γ_2 en B.
La droite passant par M et parallèle à L rencontre le cercle Γ_1 en C et le cercle Γ_2 en D.
Les droites CA et DB se coupent en E.
Les droites AN et CD se coupent en P.
Les droites BN et CD se coupent en Q.

Montrez que $EP = EQ$

Correction



Ce que l'on peut dire:

- $\widehat{EBA} = \widehat{BDM} = \widehat{ABM}$
- Donc la droite (AB) est bissectrice de $\widehat{EBM}$ et de $\widehat{EAM}$.
- Donc, si s $=S_{(AB)}$, donc S(AE)=(AM). De même , S(BE)=(BM). On en déduit que donc s€=M.
  D'où, les droites (AB) et (EM) sont orthogonales.
- Comme (CD) et (AB) sont parallèles, on a aussi (CD) et (EM) orthogonales.
  Or, M , P et Q sont sur (CD).
  Donc, **EP = EQ si et seulement si MP = MQ**.
- Soit $\{H\} = (AB) \cap ((MN)$.
  La puissance de H par rapport au cercle (Γ_1) est HM.HN.
  Comme le point H est sur la tangente en A à (Γ_1), on a : AH ^{2} = HM.HN
  De même , BH ^{2} = HM.HN
  On en déduit alors que AH = BH

Comme (AB) //(PQ) sont parallèles, on en déduit que $\frac{AH}{BH} = \frac{PM}{QM}$
Donc, que PM = QM , d'où EP = EQ

Exercice3

Soient a,b *et* c trois nombres réels strictement positifs tels que $abc = 1$.

Montrez que $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)(c-1+\frac{1}{a}) \leq 1$

Exercice4

Montrer que pour tous réels strictement positifs a , b et c, on a :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

Correction

Commençons par montrer que pour tout triplet de réels > 0 (a , b , c) , on a:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}} \quad \text{ou encore} \quad \left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2 \geq a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc)$$

Pour cela, remarquons que pour A , B , C et D réels > 0 , on a:

$$(A^2 + B^2) \geq 2AB \quad \text{et} \quad (A^4 + B^4 + C^4 + D^4) \geq 4ABCD$$

De là, on a:

$$\begin{aligned}
\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2-\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2 &= \left(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)\left(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right) \\
&\geq 2.b^{\frac{2}{3}}.c^{\frac{2}{3}} \times 4a^{\frac{2}{3}}.b^{\frac{1}{3}}.c^{\frac{1}{3}} \\
&\geq 8.a^{\frac{2}{3}}.b.c
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité :

$$\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right) \geq \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2+8a^{\frac{2}{3}}.b.c$$
$$\geq a^{\frac{2}{3}}.(a^2+8.b.c)$$

Ce qui permet de voir que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$$

De la même façon, on a les deux autres inégalités :

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} \geq \frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}} \quad \text{et} \quad \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$$

Il ne reste plus qu'à faire la somme pour obtenir :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

Exercice5

Soit a , b , c , d des entiers tels que $a > b > c > d > 0$.
On suppose que $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$

Montrer que $ab + cd$ n'est pas un nombre premier.

Correction

Soit a , b , c , d des entiers tels que $a > b > c > d > 0$.
On suppose que $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$
Montrer que $ab + cd$ n'est pas un nombre premier.

Supposons que $(ab + cd)$ est un nombre premier.
Remarquons alors que : $(ab + cd) = (a+d)c + (b-c)a$. (égalité 1:)

On connait le Théorème de Bachet-Bezout et on sait que pour deux entiers A et B , il existe deux entiers u et v tels que : $\text{PGCD}(A , B) = uA + vB$.
De plus, pour tout U et V entiers, $(UA + VB)$ est un multiple de $\text{PGCD}(A ,B)$.

L'égalité 1: permet alors de dire qu'il existe un entier m tel que :

$$(ab + cd) = m.\text{PGCD}(a+d , b-c) \quad \text{(égalité 2:)}$$

La question est donc résolue si on peut démontrer, dans l'égalité 2: que m et PGCD($a+d$, $b-c$) sont tous les deux strictement supérieurs à 1.
Remarquons que ces deux entiers ne peuvent pas être nuls et qu'ils sont positifs.

Distinguons alors 2 cas:

- **1èr cas $m = 1$.**
  Dans ce cas, l'égalité 2: s'écrit : PGCD($a+d$, $b-c$) = $ab + cd$.
  Comme $a > b > c > d > 0$, on a alors:
  PGCD($a+d$, $b-c$) > $ab + cd - (a - b + c + d)$
  PGCD($a+d$, $b-c$) > $(a+d)(c-1) + (b-c)(a+1)$
  Or, $(a+d)(c-1) + (b-c)(a+1)$ est un multiple de PGCD($a+d$, $b-c$) et est > 0.
  Il y a donc une contradiction.
  On ne peut pas avoir $m = 1$.

- **2ème cas PGCD($a+d$, $b-c$) = 1.**
  Dans ce cas, comme $(ac + bd) = (a+d)b - (b-c)a$, et que pour hypothèse, on a:
  $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$, on peut écrire que :
  $(a+d)(a-c-d) = (b-c)(b+c+d)$ (égalité 3:)
  Comme On a PGCD($a+d$, $b-c$) = 1 , on peut dire que $(a+d)$ et $(b-c)$ sont premiers entre eux et donc, d'après l'égalité 3:, qu'il existe un entier k positif tel que
  $(a-c-d) = k(b-c)$ et $(b+c+d) = k(a+d)$
  En faisant la somme de ces deux égalités, on obtient alors:
  $(a+b) = k(a+b-c+d)$ ce qui peut aussi s'écrire $k(c-d) = (k-1)(a+b)$.
  Or, on a: $a > b > c > d > 0$.
  Si $k = 1$, alors $c = d$. Ce qui est impossible.
  Si $k > 1$, alors on a:
  $$\frac{k}{k-1} = \frac{a+b}{c-d}$$
  Le premier terme de cette égalité est inférieur à 2.
  Le second terme de cette égalité est strictement supérieur à 2.
  Il y a donc une contradiction.
  On ne peut donc pas avoir PGCD($a+d$, $b-c$) = 1.

Conclusion:
On a $(ab + cd) = m$.PGCD($a+d$, $b-c$) avec m et PGCD($a+d$, $b-c$) entiers > 1.
L'entier $(ab + cd)$ n'est donc pas un nombre premier.