Exercice similitude

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = 2 + i, \quad z_B = 1 + 2i, \quad z_C = 6 + 3i, \quad z_D = -1 + 6i.$$

1) Représenter les points A, B, C et D.

2) Montrer qu'il existe une similitude directe f telle que $f(A) = B$ et $f(C) = D$.
Montrer que cette similitude est une rotation, et préciser ses éléments caractéristiques.

3) Soit J le point d'affixe $3 + 5i$.
Montrer que la rotation R de centre J et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B.

4) On appelle I le point d'affixe $1 + i$, M et N les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.
Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la nature du quadrilatère $IMJN$.

5) On considère les points P et Q tels que les quadrilatères $IAPB$ et $ICQD$ sont des carrés directs.

a) Calculer les affixes z_P et z_Q des points P et Q.

b) Déterminer $\dfrac{IP}{IA}$ et $\dfrac{IQ}{IC}$ ainsi qu'une mesure des angles $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IP}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IQ}\right)$. En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(A) = P$ et $g(C) = Q$.

c) En déduire que J est l'image de M par g. Que peut-on en déduire pour J ?

correction

1. Voir graphique à la fin.

2. On a $A \neq C$ et $B \neq D$. On sait alors qu'il existe une similitude directe et une seule f telle que $f(A) = B$ et $f(C) = D$. Notons k son rapport et θ son angle. On a

$$\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = \frac{(-1+6i)-(1+2i)}{(6+3i)-(2+i)} = \frac{-2+4i}{4+2i} = \frac{i(4+2i)}{4+2i} = i.$$

Par suite,

$$k = \frac{BD}{AC} = \frac{|z_D - z_B|}{|z_C - z_A|} = \left|\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right| = |i| = 1.$$

Ceci montre déjà que f est une isométrie directe et donc soit une rotation, soit une translation. De plus,

$$\theta = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \text{ à } 2k\pi \text{ près, } k \in \mathbb{Z}.$$

montre que f est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

L'expression complexe de f est de la forme $z' = iz + a$ où a est un nombre complexe. De plus,

$$f(A) = B \Rightarrow z_B = iz_A + a \Rightarrow 1 + 2i = i(2+i) + a \Rightarrow a = 2.$$

f est donc la rotation d'expression complexe $z' = iz + 2$. On sait que le centre I de f est l'unique point invariant par f. Or

$$f(I) = I \Leftrightarrow z_I = iz_I + 2 \Leftrightarrow (1-i)z_I = 2 \Leftrightarrow z_I = \frac{2}{1-i} \Leftrightarrow z_I = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} \Leftrightarrow z_I = \frac{2(1+i)}{1^2+1^2} \Leftrightarrow z_I = 1+i.$$

$$\boxed{f \text{ est la rotation de centre } I(1,1) \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}.}$$

3. L'expression complexe de R la rotation de centre J et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ est

$$z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_J) + z_J = -i(z - 3 - 5i) + 3 + 5i = -iz - 2 + 8i.$$

Mais alors,

$$z'_A = -iz_A - 2 + 8i = -i(2+i) - 2 + 8i = -1 + 6i = z_D,$$

et

$$z'_C = -iz_C - 2 + 8i = -i(6+3i) - 2 + 8i = 1 + 2i = z_B.$$

$$\boxed{\text{La rotation } R \text{ de centre } J(3,5) \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{2} \text{ transforme } A \text{ en } D \text{ et } C \text{ en } B.}$$

4. Par une rotation, l'image du milieu d'un segment est le milieu du segment image. Par suite, $f(M)$ est le milieu du segment $[f(A)f(C)]$ c'est-à-dire du segment $[BD]$. Ainsi, $f(M) = N$. Le point N est donc l'image du point M par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On en déduit que le triangle MIN est rectangle isocèle en I.

De même, $R(M)$ est le milieu du segment $[R(A)R(C)]$ c'est-à-dire du segment $[DB]$. Donc $R(M) = N$ et N est l'image de M par la rotation de centre J et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. Le triangle MJN est rectangle isocèle en J.

Puisque les triangles MIN et MJN sont rectangles isocèles en I et J respectivement,

$$\boxed{\text{le quadrilatère } IMJN \text{ est un carré.}}$$

5. **a.** Puisque le triangle IAB est isocèle rectangle direct, le point P est le point tel que IAPB soit un parallélogramme. Donc $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{IA}$ ce qui s'écrit encore $z_P - z_B = z_A - z_I$. Par suite

$$z_P = z_A + z_B - z_I = (2+i) + (1+2i) - (1+i) = 2+2i.$$

De même

$$z_Q = z_C + z_D - z_I = (6+3i) + (-1+6i) - (1+i) = 4+8i.$$

$$\boxed{z_P = 2+2i \text{ et } z_Q = 4+8i.}$$

b. Les quadrilatères IAPB et ICQD sont des carrés directs. Donc immédiatement

$$\boxed{\frac{IP}{IA} = \frac{IQ}{IC} = \sqrt{2} \text{ et } \left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IP}\right) = \left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IQ}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ à } 2k\pi \text{ près, } k \in \mathbb{Z}.}$$

Puisque $A \neq C$ et $P \neq Q$, g existe et est unique. Or d'après ce qui précède la similitude de centre I, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ transforme A en P et C en Q.

$$\boxed{g \text{ est la similitude de centre I, de rapport } \sqrt{2} \text{ et d'angle } \frac{\pi}{4}.}$$

c. Puisque le carré IMJN est un carré direct, on a immédiatement $g(M) = J$. Mais M est le milieu du segment $[AC]$ et l'image par une similitude du milieu d'un segment est le milieu du segment image. Donc $g(M) = J$ est le milieu du segment $[g(A)g(C)]$ ou encore

$$\boxed{J \text{ est le milieu du segment } [PQ].}$$