serie3

EXERCICE 1

Déterminer les entiers naturels x et y tels que : $\begin{cases} x+y=182 \\ \text{PGCD}\,(x\,;\,y)=13 \end{cases}$

EXERCICE 2

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E) :

$$16\,x - 3\,y = 4.$$

1. Vérifier que le couple (1, 4) est une solution particulière de (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

EXERCICE 3

1. *a.* Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2009 par 11.

b. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.

c. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11.

2. On désigne par p un nombre entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul n le nombre $A_n = 2^n + p$.

On note d_n le PGCD de A_n et A_{n+1}.

a. Montrer que d_n divise 2^n.

b. Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p. Justifier.

CORRECTION

EXERCICE 1

PGCD(x ; y) = 13 donc il existe deux entiers naturels a et b premiers entre eux tels que $x = 13\,a$ et $y = 13\,b$

$x + y = 182 \Leftrightarrow 13\,(a + b) = 182 \Leftrightarrow a + b = 14$

$a + b = 14$ donc si a est pair alors b l'est aussi or a et b sont premiers entre eux donc ce cas est exclu

a	1	3	5	$\cancel{7}$	9	13
b	13	11	9	$\cancel{7}$	5	1
$x = 13\,a$	13	39	65		117	169
$y = 13\,b$	169	143	117		65	13

Le cas $a = 7$ et $b = 7$ est exclu car a et b sont premiers entre eux.

Les solutions de $\begin{cases} x+y=182 \\ \text{PGCD}\,(x\,;\,y)=13 \end{cases}$ sont les couples (13 ; 169) (39 ; 143) (65 ; 117) (117 ; 65) et (169 ; 13)

EXERCICE 2

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E) : $16\,x - 3\,y = 4$.

1. $16 \times 1 - 3 \times 4 = 16 - 12 = 4$ donc le couple (1, 4) est une solution particulière de (E).

2. Le couple d'entiers relatifs (x, y) est solution de l'équation (E) : $16\,x - 3\,y = 4$

$\begin{cases} 16\,x-3\,y=4 \\ 16\times 1-3\times 4=4 \end{cases}$ donc par différence membre à membre : $16\,(x - 1) - 3\,(y - 4) = 0$

soit $16\,(x - 1) = 3\,(y - 4)$

16 divise $3\,(y - 4)$, 16 est premier avec 3 donc d'après le théorème de Gauss, 16 divise $y - 4$

il existe un entier relatif k tel que $y - 4 = 16\,k$

en remplaçant dans $16\,(x - 1) = 3\,(y - 4)$ alors $x - 1 = 3\,k$

donc $x = 3\,k + 1$ et $y = 16\,k + 4$

Vérification : $16\,(3\,k + 1) - 3\,(16\,k + 4) = 16 - 3 \times 4 = 4$

L'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) sont de la forme $(3\,k + 1\,;\,16\,k + 4)$ avec k entier relatif quelconque.

EXERCICE 3

1. *a.* 1. (a) $2009 = 11 \times 182 + 7$ donc le reste dans la division euclidienne de 2009 par 11 est 7.

b. $2^4 = 16$ donc $2^4 \equiv 5\ (11)$ donc $(2^4)^2 \equiv 5^2\ (11)$ soit $2^8 \equiv 3\ (11)$

$2^{10} = 2^8 \times 2^2$ donc $2^{10} \equiv 3 \times 4\ (11)$ soit $2^{10} \equiv 1\ (11)$

c. $2^{2009} = 2^{2000} \times 2^9 = (2^{10})^{200} \times 2^9$ donc $2^{2009} \equiv 2^9\ (11)$ or $2^8 \equiv 3\ (11)$ donc $2^9 \equiv 3 \times 2\ (11)$ soit $2^9 \equiv 6\ (11)$

$2^{2009} \equiv 6\ (11)$ et $2009 \equiv 7\ (11)$ donc $2^{2009} + 2009 \equiv 13\ (11)$ donc $2^{2009} + 2009 \equiv 2\ (11)$

Le reste dans la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11 est 2.

2. *a.* $A_n = 2^n + p$ et $A_{n+1} = 2^{n+1} + p = 2 \times 2^n + p$

$A_{n+1} = 2^n + 2^n + p$ donc $A_{n+1} - A_n = 2^n$

d_n est le PGCD de A_n et A_{n+1} donc d_n est le PGCD de A_n et $A_{n+1} - A_n$ donc d_n est le PGCD de A_n et 2^n

d_n divise 2^n.

b. $n \geq 1$ donc 2^n est un multiple de 2 donc un nombre pair donc $2^n + p$ a la même parité que p