Exercice1

p est un nombre premier différent de 2. Montrer que $x^2 - y^2 = p$ admet un seul couple d'entiers naturels solution.

Exercice 2

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : « pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».

Proposition 2 : « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0$ (modulo 6) alors $x \equiv 0$ (modulo 3) ».

Exercice 3

Déterminer tous les entiers naturels qui divisés par 11 donnent un quotient égal au double du reste.

Exercice 4

Soit n un entier naturel. Soit $a = 18\,n + 60$ et $b = 15\,n + 26$
Soit d un diviseur commun à a et b.

1. Démontrer que d divise 144.
2. Démontrer que si d est pair alors n est pair.

Exercice 5

n est un entier naturel non nul tel que $n = 10\,a + b$ où a et b sont des entiers naturels.

a) Démontrer que si $a - 11\,b$ est divisible par 37, alors n est divisible par 37.
b) Sans utiliser la calculatrice, démontrer que 38 369 est divisible par 37.

Exercice 6

1. Vérifier les congruences : $2^{12} \equiv 1$ mod 13 et $3^6 \equiv 1$ mod l3.
2. Montrer que $2^{70} + 3^{70}$ est divisible par 13.

CORRECTION

Exercice 1

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = p$ or p est un nombre premier donc admet pour seuls diviseurs positifs 1 et lui-même, donc
x et y étant des entiers naturels alors $x + y > x - y$
donc $x + y = p$ et $x - y = 1$
par addition terme à terme : $2\,x = p + 1$
p est un nombre premier différent de 2 donc est impair
donc $p + 1$ est pair donc $\dfrac{p+1}{2}$ est un entier naturel,
alors par différence terme à terme :$2\,y = 1 - p$ donc $y = \dfrac{p-1}{2}$.
$x^2 - y^2 = p$ admet un seul couple de solution : $\left(\dfrac{p+1}{2} ; \dfrac{p-1}{2}\right)$.

Exercice 2

Proposition 1 VRAIE

$2^2 = 4$ donc $2^2 \equiv 1$ modulo 3
donc pour tout entier naturel n, $2^{2n} \equiv 1$ modulo 3

donc pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$.

Proposition 2 FAUSSE

si $x = 2$ alors $x^2 = 4$ et $x^2 + x = 6$ donc $x^2 + x \equiv 0$ (6) et x n'est pas congru à 0 modulo 3

Exercice 3

$a = 11\,q + r$ avec $0 \leq r < 11$
$q = 2\,r$ donc $a = 2\,r \times 11 + r = 23\,r$ avec $0 \leq r < 11$
$a \in \{0 ; 23 ; 46 ; 69 ; 92 ; 115 ; 138 ; 161 ; 184 ; 207 ; 230\}$

Exercice 4

1. Il faut éliminer n entre a et b,
$5\,a - 6\,b = 90\,n + 300 - (90\,n + 156) = 144$
d divise a et b donc d divise $5\,a - 6\,b$ donc d divise 144

2. si d est pair, 2 divise d et d divise a et b donc 2 divise a et b donc 2 divise $15\,n + 26$ donc $15\,n + 26 \equiv 0$ modulo 2
or $15 \equiv 1$ modulo 2 et $26 \equiv 0$ modulo 2 donc $n \equiv 0$ modulo 2
donc n est pair.

Exercice 5

a) si $a - 11\,b$ est divisible par 37, alors il existe un entier naturel k tel que $a - 11\,b = 37\,k$ donc $a = 37\,k + 11\,b$
donc $n = 370\,k + 110\,b + b = 370\,k + 111\,b$
or $111\,b = 37 \times 3\,b$ donc $n = 37\,(10\,k + 3\,b)$;
$10\,k + 3\,b$ est un nombre entier donc n est divisible par 37.

b) $n = 38360 + 9$ donc $a = 3836$ et $b = 9$
donc $a - 11\,b = 3836 - 99 = 3737 = 37 \times 101$
donc $a - 11\,b$ est divisible par 37 donc n est divisible par 37.

Exercice 6

1. $2^4 \equiv 3$ mod 13 donc $2^8 \equiv 3^2$ mod 13
$2^{10} = 2^8 \times 2^2$ donc $2^{10} \equiv 4 \times 9$ mod 13
or $36 = 13 \times 2 + 10$ donc $2^{10} \equiv 10$ mod 13
$2^{12} = 2^{10} \times 2^2$ et $2^{10} \equiv 10$ mod 13
$2^{12} = 2^{10} \times 2^2$ donc $2^{12} \equiv 10 \times 4$ mod 13
$40 = 3 \times 13 + 1$ donc $40 \equiv 1$ mod 13 donc $2^{12} \equiv 1$ mod 13

$3^3 = 27 = 2 \times 13 + 1$ donc $3^3 \equiv 1$ mod 13 donc $3^6 \equiv 1$ mod l3.

2. $2^{70} = 2^{12 \times 5 + 10}$ donc $2^{70} \equiv 2^{10}$ mod 13
de même $3^{70} = 3^{6 \times 11 + 4}$ donc $3^{70} \equiv 3^4$ mod 13
$3^3 \equiv 1$ mod 13 donc $3^4 \equiv 3$ mod 13
donc $2^{70} + 3^{70} \equiv 10 + 3$ mod 13 donc $2^{70} + 3^{70} \equiv 0$ mod 13