ARITHMETIQUE

Exercice 1 :

Soit n un entier relatif et $a = 5n^3 + n$. Montrer que a est divisible par 3.

Exercice 2 :

Soit n un entier naturel
Montrer que $3^{3n+2} + 2^{n+4} \equiv 0[5]$

Exercice 3 :

Soit p un nombre entier naturel impair. Montrer que la somme de p entiers naturels consécutifs est un multiple de p.

Exercice 4 :

Indice : Théorème de Bézout
Soit x un réel. Montrer que si x^7 et x^{12} sont des nombres rationnels, alors x l'est également.

Exercice 5 :

Indice: Lemme de Gauss
Résoudre dans N* l'équation : $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1$

Exercice 6 :

Soit n un entier naturel
Montrer que quelque soit n, la fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ est toujours irréductible.

Exercice 7 :Nombres de Mersenne

Soit n un entier naturel non nul.
On considère les nombre de la forme : $M_n = 2^n - 1$ dits nombres de Mersenne.
1. Montrer que M_2, M_3, M_5, M_7 sont des nombres premiers.
2. Montrer que si p est un diviseur de n, alors M_n est divisible par $2^p - 1$.

En déduire que si M_n est un nombre premier alors n l'est également.
3. Etudier la réciproque.

Exercice 8 :

Trouver tous les couples (a,b) d'entiers naturels vérifiant : ppcm(a,b) = 40 et a+b=60

Exercice 9 :

Soit a et b deux entiers naturels.
Montrer que si pgcd(a,b) = 1 alors pgcd(a,b^2) = 1

Exercice 10 :

Soit n un entier naturel impair,
Montrer que parmi $(n-1)^2+1$ entiers, il en existe n dont la somme est un multiple de n.

Exercice 11 :

Soit n un entier naturel
1. Démontrer que n^2+5n+4 et n^2+3n+2 sont divisibles par (n+1)
2. Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $3n^2+15n+19$ est divisible par n+1
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $3n^2+15n+19$ n'est pas divisible par n^2+3n+2

Exercice 12 : Nombres de Fermat .

Soit n un entier naturel .
a. Montrer que si 2^n+1 est premier, alors n est une puissance de 2
b. On pose $Fn = 2^{2^n}+1$(nombres de Fermat). Montrer que les F_n sont deux à deux premiers entre eux.

ETUDE DE FONCTION

EXERCICE

On considère la fonction f définie, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, par :

$$f(x) = x + 3 + \frac{9}{x-1}$$

On désigne par C_f sa représentation graphique dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$; $+\infty$; 1^- et 1^+.
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 3$ est une asymptote oblique à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Calculer la fonction dérivée f' de f. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$$

4. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
5. Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse $x_0 = 0$.

PRIMITIVE ET INTEGRALLE

Exercice n° 1 :

Calculer l'intégrale proposée :

a. $\displaystyle\int_2^3 0\,dt$.

b. $\displaystyle\int_{-1}^2 (-x+6)\,dx$.

c. $\displaystyle\int_0^4 (2x^2+8x-1)\,dx$.

d. $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\cos x)\,dx$.

e. $\int_{-2}^{0}(x^5+4x^3+x^2-x)dx$.

f. $\int_{1}^{3}(\frac{1}{x^2})dx$.

g. $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{\cos^2 x})dx$.

h. $\int_{3}^{4}(\frac{1}{\sqrt{2x+5}})dx$.

Exercice n° 2 : calculs d'aires.

Soit $f(x)=x^2+1$.
I=[-1;0].
D est délimité par l'axe des abscisse, la courbe C, les droites d'équations x=-1 et x=0 .
Démontrer que f est positive sur I et calculer l'aire du domaine D ..

Exercice n° 3 : propriétés de l'intégration.

On considère $\int_{a}^{b}f(x)dx=5$. et $\int_{a}^{b}g(x)dx=3$.

a. Calculer $\int_{a}^{b}(2f(x)-4g(x))dx$.

b. Déterminer β · sachant que : $\int_{a}^{b}(4f(x)-\beta g(x))dx=2$.

Exercice n° 4 : propriétés de l'intégration.

Justifier sans calcul le résultat suivant :

$$\int_{-5}^{5}(x^3 - \tan x)dx = 0 .$$

Exercice n° 5 :

Calculer l'intégrale proposée en linéarisant :

a. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$.

b. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x . \cos x dx$.

Exercice n° 6 :

Soit $f(t) = \frac{-6t-3}{(t+2)^2(t-1)^2}$ . .

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout t différent de -2 et 1, $f(t) = \frac{a}{(t+2)^2} + \frac{b}{(t-1)^2}$.

b. En déduire les primitives de f sur]-2;1[

EXERCICE7

1. Déterminer trois réels a,b,c tels que , pour tout $x \in]0;+\infty[$:

   $$\frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2} .$$

2. Soit $X \geq 1$.

a. Calculer $\int_{1}^{X} \frac{dx}{x(1+x)^2}$.

b. Soit f la fonction définie sur $x \in [1;+\infty[$ par $f(X) = \int_{1}^{X} \frac{lnx}{(1+x)^3} dx$

En intégrant par parties, calculer f(X) en fonction de X .

c. Montrer que $\lim_{X \to +\infty} f(X) = \frac{1}{2}(ln2 - \frac{1}{2})$