Probleme

Partie A

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considere l'équation différentielle :

$$(E_n)\ y' + y = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel :

$$g(x) = h(x)e^{-x}$$

a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel :

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}\ .$$

b. En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que f(0)=0.

Quelle est alors la fonction g?

2. Soit ϕ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que ϕ est solution de (E_n) si et seulement si $\phi - g$ est solution de l'équation :

(F) y'+y=0

b. Résoudre (F) .

c. déterminer la solution générale ϕ de l'équation (E_n) .

d. Déterminer la solution f de l'équation (E_n)vérifiant f(0)=0 .

Partie B

Le but de cette partie est de montrer que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) = e}$$

1. On pose, pour tout x réel,

$$f_0(x) = e^{-x}\ , f_1(x) = xe^{-x}.$$

a. vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : y'+y= f_0 .

b. Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle y'+y= f_{n-1} vérifiant $f_n(0)=0$.

En utilisant la partie A, montrer par récurrence que , pour tout x réel et tout entier $n \geq 1$:

$$f_n(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-x} .$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$$

a. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle [0;1], l'encadrement :

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!} .$$

En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n) .

b. Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité :

$$\boxed{I_k-I_{k-1}=-\frac{1}{k!}e^{-1}} .$$

c. Calculer I_0 et déduire de ce qui précéde que :

$$I_n=1-\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-1}}{k!} .$$

d. En déduire finalement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)=e}$$

Probleme2

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par s l'application qui à tout point M de P de coordonnées (x,y) associe le point M' de coordonnées (x',y') tel que :

$$\begin{cases} x' = -x - y + 2 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$$

1. Déterminer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M .

2. Démontrer que s est une similitude plane directe.

Préciser son angle, son rapport et son centre I .

3. Soit g l'application qui à tout point M de P associe l'isobarycentre G des points M,M'=s(M) et M''=s(M') .

a. Calculer , en fonction de l'affixe z de M, les affixes des points M'' et G.

b. Démontrer que g est une similitude plane directe.

Quel est son centre ?

c. Déterminer l'affixe du point Mo tel que g(Mo) soit le point O .

Reporter sur une figure les points Mo,M'o,M''o correspondants, ainsi que le point I, centre de la similitude s .

EXERCICE(arithmetique)

Soit n un entier naturel .

1. trouver suivant les valeurs de n, les restes de la division de 5^n par 13 .

2. En déduire que $1981^{1981} - 5$ est divisible par 13.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13 .

EXERCICE(comportement asymptotique)

1. Démontrer l'inégalité de Bernoulli :

   pour tout réel x positif et tout entier naturel n, on a : $(1+x)^n \geqslant 1+nx$

2. Soit (u_n) une suite définie par : $u_n = a^n$ avec $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que :

   - Si $a \in]1\,;+\infty[$ alors (u_n) est divergente (vers $+\infty$)
   - Si $a = 1$ alors (u_n) est constante (donc convergente vers 1)
   - Si $a \in]-1\,;1[$ alors (u_n) est convergente vers 0
   - Si $a \in]-\infty\,;-1]$ alors (u_n) n'a pas de limite.

Exercice(theoreme de bijection)

Démontrer que l'équation

$$x^4 + x^3 - x + 1 = 0$$

n'a pas de solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice(similitude plane)

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O.

Soit P un point du segment [BC] distinct de B .

On note Q l'intersection de (AP) avec (CD) .

La perpendiculaire Δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S .

1. Faire une figure .

2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Préciser, en justifiant votre réponse, l'image de la droite (BC) par la rotation r .

b. Déterminer les images de R et de P par r .

c. Quelle est la nature de chacun des triangles ARQ et APS ?

3. On note N le milieu du segment [PS] et M celui du segment [QR] .

Soit s la similitude de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

a. Déterminer les images respectives de R et de P par s .

b. Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé de B ?

c. Démontrer que les points M, B, N et D sont alignés

EXERCICE(complexe)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité tout nombre complexe z tel que :

$$z^n = 1$$

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Par exemple, $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$.

1. Démontrer que :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}$$

Démontrer que la somme des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité est nulle.

Démontrer que, dans repère orthonormal direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, les images A_k $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ des nombres $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ sont les sommets d'un polygone régulier.

2. Applications :

a) Soit $Z \in \mathbb{C}$. On appelle racine $n^{\text{ème}}$ de Z tout nombre complexe tel que :

$$z^n = Z$$

Soit $R = |Z|$ et Θ un argument de Z. Démontrer que Z admet les n racines $n^{\text{èmes}}$ suivantes :

$$\sqrt[n]{R}e^{i\left(\frac{\Theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},\ 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

b) Soit f la fonction polynôme définie par :

$$f(x) = x^4 + 1$$

Déterminer les racines quatrièmes de -1 puis en déduire que f peut s'écrire comme un produit de deux fonctions polynômes de degré 2 à coefficients réels.

c) Soit z un nombre complexe tel que : $1 + z^4 + z^8 = 0$

Démontrer que z est une racine $12^{\text{ème}}$ de l'unité.