Série N°5 (Matrices et systèmes) $4^{ème}$ E.G

Exercice 1 :

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} -15 & 10 & 8 \\ -8 & 6 & 4 \\ -24 & 15 & 13 \end{pmatrix}$

1) Calculer A^2 .

2) Vérifier que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$.

En déduire que A est inversible et donner l'expression de sa matrice inverse.

3) Résoudre le système suivant : $\begin{cases} -15x + 10y + 8z = -1 \\ -8x + 6y + 4z = 2 \\ -24x + 15y + 13z = -3 \end{cases}$

Exercice2 :

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $et \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

1) Vérifier qu'on a : $A = B + 4I_3$

2) Trouver une relation entre A et A^2

.3) Trouver une relation entre B, B^2 et I_3 .

4) Montrer que B est inversible et déterminer B^{-1} .

5) Résoudre le système $B \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 :

Soit la matrice B= $\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 0 & -a & -1 \\ 1 & a+2 & -1 \end{pmatrix}$ ou' a est un paramètre réel

1) Calculer dét B

2) En déduire les valeurs de a pour les quelles B est inversible.

3) Donner B^{-1} quand-elle existe.

4) Résoudre par un calcul matricielle le système : (S) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y - z = 3 \\ x + 3y - z = 2 \end{cases}$

Exercice 4 :

Résoudre les systèmes suivants par la méthode de Cramer :

(S) $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 17x - 5y = 9 \end{cases}$ et (S') $\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$