Rappel du cours (rotation du plan)

Theoreme1 Guesmi.B

$R_1(O_1 ;\Theta_1)$; $R_2(O_2 ;\Theta_2)$ sont deux rotations de centres O_1et O_2 distincts et d'angles Θ_1 etΘ_2

Non nuls alors

1) Si $\Theta_1+\Theta_2=2k\pi$; $k\epsilon Z$ alors R_2oR_1est une translation
2) si $\Theta_1+\Theta_2\neq 2k\pi$ alors R_2oR_1 est une rotation d'angle $\Theta_1+\Theta_2$

REMARQUE

Pour déterminer le vecteur de la translation dans le premier cas du théorème
Il suffit de connaitre l'image d'un point par R_2oR_1 si on choisit O_1 centre de R_1 son image O'_1 par R_2oR_1 est $R_2(O_1)$ et R_2oR_1 est la translation de vecteur $\overrightarrow{O_1O_1'}$

EXERCICE1(seulement 4èMaths)

A l'extérieur d'un quadrilatère convexe ABCD direct on construit les triangles équilatéraux AI_1B ; BI_2C ; CI_3D et DI_4A
R_1 ;R_2 ;R_3et R_4 les rotations de centres I_1 ;I_2 ;I_3et I_4 et d'angle (-π/3)

1) Montrer que $R_4oR_3oR_2oR_1$ est la rotation de centre A et d'angle (-4π/3)
2)a)montrer que R_2oR_1 est une rotation ; soit P son centre
   b) montrer de même que R_4oR_3 est une rotation soit Q son centre
3) en déduire que le triangle APQ est équilatéral

EXERCICE2(4è maths)

ABC est un triangle H son orthocentre et O le centre de son cercle circonscrit(Ω)
A' le milieu de [BC]

1)a)soit P le point défini par $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ montrer que P=H
   b) en déduire que $\overrightarrow{AH}=-2\overrightarrow{OA}'$
2) montrer que $t_{\overrightarrow{AH}}=S_{(BC)}oS_d$ avec d est une droite que vous déterminer
3) montrer que montrer que le point K tel $S_{(BC)}(H)$=K appartient à(Ω

Guesmi.B

Correction de l'exercice1

1)Il résulte du théorème vu précédemment que $R_4oR_3oR_2oR_1$ est une rotation d'angle

4x(-π/3)

Puisque $R_1(A)=B$; $R_2(B)=C$; $R_3(C)=D$ et $R_4(D)=A$ donc A est invariant

Soit $f=R_4oR_3oR_2oR_1$

Donc A est le centre de cette rotation

2)a)et b) même procède comme 1)

Soit $R=R_2oR_1$ puisque R_1 et R_2 sont de centres I_1 et I_1 la droite commune aux deux

Rotations est. (I_1I_2) donc soit $R=S_{d1}oS_{(I1I2)}oS_{(I1I2)}oS_{d1}$; $d_1=(I_1P)$; $d_2=(I_2P)$

Et tel que $(\overrightarrow{I_1I_2};\overrightarrow{I_1P})$ Ξπ/6[2π] et $(\overrightarrow{I_2I_1}.\overrightarrow{I_2p})$Ξ –π/6[2π]

De la même manière on détermine Q avec $R'=R_4oR_3$

3)on a f=R'oR est la rotation de centre A et d'angle (-4π/3)

On a alors $f=S_{(QA)}oS_{(QP)}oS_{(PQ)}oS_{(PA)}$

Avec $(\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PQ})\Xi-\pi/3[2\pi]$ et $(\overrightarrow{QP};\overrightarrow{QA})\equiv-\pi/3[2\pi]$ donc le triangle APQ est équilatéral

Correction exercice2

1)a) on a A' milieu de [BC] donc $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}'$

D'où $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}\ mais\ \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OA}'\ donc\ \overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{OA}'$

(AP)//(OA') ; (OA') est la médiatrice de [BC]donc (AH) est une droite portant la hauteur issue de A

Du triangle ABC même raisonnement pour (BP) et (CP) donc P est l'orthocentre du triangle ABC

Guesmi.B

Alors P=H

b) on a : $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{OA}'$ $or\ P = H\ donc\ \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA}'$

on sait que toute translation peut être décomposée de plusieurs façon en produit de

deux symétries orthogonales d'axes parallèles

soit alors $d = t_{\frac{-1}{2}\overrightarrow{AH}}(BC)$ vu que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA}'$ doc d passe par O

on $S_d(\Omega)=\Omega$ et $S_{(BC)}(\Omega) =\Omega'$

soit $t=S_{(BC)}oS_d$ donc $t(\Omega)=\Omega'$ comme $A\epsilon(\Omega)$ et que $H=t(A)$ donc $H\epsilon\Omega'$ donc

$S_{(BC)}(H)\epsilon S_{(BC)}(\Omega')$ alors $K\epsilon\Omega$

EXERCICE3

Soit D une droite fixe et A un point fixe tel que A n'est pas sur D ; M un point variable de D

On construit le cercle (C) de » centre A et passant par M et le cercle (C') de centre M et

Passant par A on désigne par N et P les points d'intersections de (C) et (C')

(on prend N et P tel que le triangle AMN est direct)

1)montrer que AMN er AMP sont équilatéraux

2)montrer que $R_{(A\frac{\pi}{3})}(M) = N\ et\ R_{\left(A;\frac{-\pi}{3}\right)}(M) = P$

3)déterminer alors l'ensemble décrit par N et P lorsque M décrit la droite D

CORRECTION

1) On a AM=AN et MN=MA donc AM=AN=MN donc le triangle AMN est équilatéral

De la même manière on montre que AMP est équilatéral

2)montrons que $R_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}(M) = N$ on a $\begin{cases} AM = AN \\ (\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AN}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow R_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}(M) = N$

De même on montre que $R_{\left(A;\frac{-\pi}{3}\right)}(M) = P$

3)posons $r_1 = R_{(A;\frac{\pi}{3})}\ et\ r_2 = R_{(A;\frac{-\pi}{3})}$ on a alors

Guesmi.B

Alors Mϵ(C) soit $C_1=r_1(C)$ et $C_2=r_2(C)$

Donc soit $A_1=r_1(A)$ donc N décrit le cercle $C_1(A_1;R)$; R le rayon de (C)

De même P décrit le cercle $C_2(A_2;R)$ avec $A_2=r_2(A)=A$ d'où $C_2=C$

EXERCICE4

Soit (C) un cercle de centre O et A un point fixe non situé sur C ;

M un point variable de (C) on construit le point N tel que le triangle AMN soit

Isocèle de sommet principal A et tel que $(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AN}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$

1)a)montrer que N est l'image de M par une rotation que l'on precisera

b)En déduire l'ensemble des points N lorsque M decrit (C)

2)soit I le milieu de [MN] et M'=$R_{(A;\frac{\pi}{4})}(M)$

a) construire M' soigneusement

b)montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AM'}$

c) en déduire l'ensemble des points I lorsque M décrit (C)

CORRECTION

1)a) puisque $\begin{cases} AM = AN \\ (\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AN}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow R_{(A;\frac{\pi}{2})}(M) = N$ soit $r_1=R_{(A;\frac{\pi}{2})}$

b) puisque Mϵ(C) alors $r_1(M)$ϵ$r_1(C)$ =C' cercle

soit $o_1=r_1(O)$;$C_1(O_1,R)$; R rayon du cercle C

2)a)on I milieu de [MN] soit r'=$R_{(A;\frac{\pi}{4})}$ on aM'=r'(M)$\Leftrightarrow \begin{cases} AM = AM' \\ (\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}}) \equiv \frac{\pi}{4}(2\pi) \end{cases}$

b)I milieu de [MN] donc AMN est rectangle isocèle enA

$(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AI}}) \equiv \frac{\pi}{4}(2\pi) or\ (\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}}) \equiv \frac{\pi}{4}(2\pi)$ donc $\overrightarrow{AM} et\ \overrightarrow{AI}$ sont colinéaires

Et de même sens

Guesmi.B

mais AI<AM et AI=IM=IN donc le triangle IAM est

Rectangle isocèle en I donc en utilisant le théorème de Pythagore

On aura $MA^2=2\ IA^2$ mais AM=AM' donc $\overrightarrow{AI} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AM'}$

A étant fixe donc I est l'image de M' par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Puisque M'=r'(M) or Mϵ(C) donc M'ϵr'(C)

Qui est un cercle C_1 même rayon R et de centre O_1=r'(O)

Soit $C_1(O_1;R)$ on a M'ϵC_1 et soit h=$h_{(A;\frac{\sqrt{2}}{2})}$ on

I=h(M') donc Iϵh(C_1)=C_2 qui est un cercle de centre O_2=h(O_1) et de rayon

$R_2=\frac{\sqrt{2}}{2}R$ alors I décrit le cercle C_2

Guesmi.B