Correction des 20 exercices(probabilite)

Exercice1

Guesmi.B

L'univers □ est l'ensemble des résultats possibles après le lancer des deux dés.
Ici, □ correspond au produit cartésien {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6}x{1 , 2 , 3 , 4, 5 , 6}.
Son cardinal est Card(□) = 6^2 = 36.
Comme on suppose qu'il y a équiprobabilité des résultats des lancers, on a alors:

$$\text{Pour tout événement A de □, } P(A) = \frac{\text{Card(A)}}{\text{Car(□)}}$$

a:
La variable aléatoire X peut prendre les valeurs -10 , -5 , +15.
L'événement "X = -10" est l'événement "obtenir le même numéro".
C'est donc l'événement A = {(1,1) , (2,2) , (3,3) , (4,4) , (5,5) , (6,6) }.
La probabilité de "X = -10" est donc :

P(X = - 10) = 6 / 36 = 1 / 6

De même, l'événement "X = -5" est l'événement "obtenir 2 numéros de parités différentes".
C'est donc l'ensemble des couples (*a* , *b*) tels que *a* soit dans {1,3,5} et *b* soit dans {2,4,6} ou bien *a* soit dans {2,4,6} et *b* soit dans {1,3,5}.
La cardinal de cet événement est donc : 3x3 + 3x3 = 18.
D'où : **P(X = - 5) = 18 /36 = 1/2.**

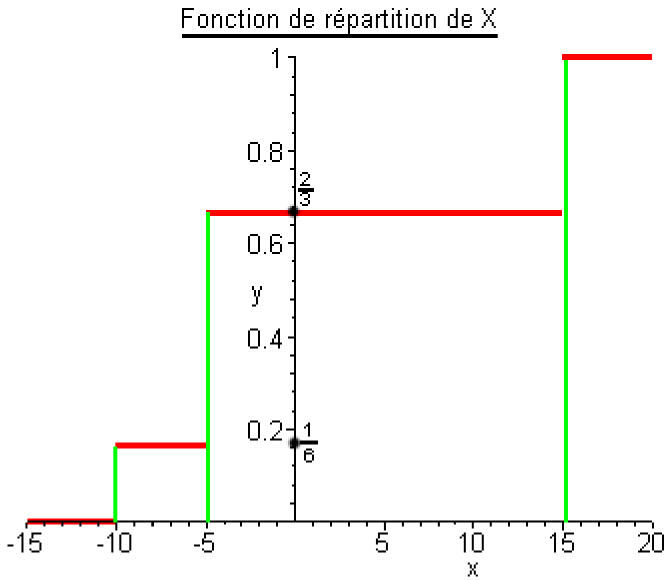
Comme S P(X = k) = 1 , on en déduit que P(X = 15) = 1 - P(X=-10) - P(X=-5).
D'où : **P(X = 15) = 1 - 1/6 - 1/2 = 1/3**
On résume cela sous la forme d'un tableau :

X = k	-10	- 5	15
P(X = k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

L'espérance de X est alors : E[X] = □ P(X=k).k = (1/6)(-10) + (1/2)(-5) + (1/3)(15)

D'où : **E[X] = 5/6**.

b: La fonction de répartition de X est la fonction F définie sur IR par :
Pour tout *x* réel, F(*x*) = P(X $\leq$ *x*).
D'après le tableau de la loi de probabilité de X, on en déduit que :
Si $x < -10$ alors F(x) = 0.
Si $-10 \leq x < -5$ alors F(x) = 1/6
Si $-5 \leq x < 15$ alors F(x) = 1/6 + 1/2 = 2/3 .
Si $x \geq 15$ alors F(x) = 1/6 + 1/2 + 1/3 = 1 .
D'où la courbe de la fonction de répartition de X.



c:
Si le joueur effectue 10 parties de suite don't les résultats sont indépendants les uns des autres, comme pour chaque partie, la probabilité d'obtenir 15 points est constante
et égale à 1/3 , on peut dire que la variable aléatoire Y égale au nombre de fois que le joueur gagne 15 points en 10 parties suit un loi binomiale de paramètres n = 10 et
p = 1/3.

Y suit donc la loi B(n = 10 , p = 1/3)

On peut donc dire que pour entier k, on a :

$$P(\ Y = k\ ) = C_{10}^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{(10-k)} = C_{10}^{k}\,\frac{2^{(10-k)}}{3^{10}}$$

$$\text{Où}\quad C_{10}^{k} = \frac{10!}{k!(10-k)!}$$

d:
La probabilité que le joueur gagne au moins une fois 15 points est :
$P(\ Y \geq 1\ ) = 1 - P(Y = 0\ ) = 1 - (2/3)^{10}$

$$P(\ Y \geq 1\ ) = 1 - P(Y = 0\ ) = 1 - (2/3)^{10} = \frac{58025}{59049}$$

e:
Le nombre de fois que le joueur peut espérer gagner 15 points en 10 parties est l'espérance de la variable aléatoire Y.
On sait que pour une variable aléatoire X de paramètre (n , p) , l'espérance de X est :

$$E[X] = n.p$$

Comme Y a pour paramètre n = 10 et p = 1/3 , on en déduit que l'espérance de Y est :

$$E[Y] = 10 / 3.$$

f:
Si le joueur joue n parties de suite alors la variable aléatoire Z égale au nombre de fois où il gagne 15 points suit une loi binomiale de paramètre (n , p =1/3).
La probabilité qu'il gagne au moins une fois 15 points durant ces n parties est alors:

$$P(\ Z \geq 1\ ) =1 - P(\ Z = 0)$$

Comme P(Z = 0) = $(2/3)^n$, on a alors P(Z $\geq$ 1) = 1 - $(2/3)^n$

g:
On veut alors que P(Z $\geq$ 1) > 0,9999. Ou encore que : 1 - (2/3)n > 0,9999.
ou encore que (2/3)n < 0,0001. En utilisant la fonction logarithme népérien, on peut alors ecrire que :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < 0{,}0001$$

$$n \ln\left(\frac{2}{3}\right) < \ln(0{,}0001)$$

$$n > \frac{\ln(0{,}0001)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \quad \text{car } \ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$$

$$n > 23 \quad \text{car n est un entier}$$

Le joueur a donc une probabilité de gagner au moins une fois 15 points supérieure à
0,9999 s'il joue au moins 23 parties de suite

Exercice2

I:
a: Il y a 20 stagiaires. On veut en choisir 3. Cela revient à chosir 3 éléments parmi 20. C'est donc le nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 20.
Le nombre de choix possibles pour les groupes de 3 est donc:

$$C_{20}^{3} = \frac{20!}{3! \times (20-3)!} = \frac{20!}{3! \times 17!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2} = 1140$$

b:
A est l'événement " les 3 stagiaires pratiquent des activités différentes"
Comme on suppose qu'il y a équiprobabilité des choix des stagiaires, on a:

$$P(A)=\frac{Card(A)}{1140}$$

Si on appelle V l'ensemble des stagiaires qui seront initiés à la planche à voile, P l'ensemble des stagiares qui seront initiés à la plongée et S l'ensemble des stagiaires qui seront initiés au ski nautique, un événement élémentaire appartient à A si et seulement il contient exactement 1 élément de V , 1 élément de P et 1 élément de S.
Comme Card(V) = 7 , Card(P) = 8 et Card(S) = 5 , on obtient:
Card(A) = 7*8*5 = 280.

$$P(A)=\frac{280}{1140} = \frac{14}{57}$$

L'évément B "les 3 stagiaires pratiquent la même activité" correspond à choisir 3 stagiaires parmi V ou P ou S.
Comme Card(V) = 7, le nombre de choix de 3 éléments de V est le nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 7.
De même, le nombre de choix de 3 éléments de P est le nombre de combinaisons

de 3 éléments parmi 8 et le nombre de choix de 3éléments de S est le nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 5.
Donc , on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(B) &= C_7^3 + C_8^3 + C_5^3 \\ &= \frac{7!}{3! \times 4!} + \frac{8!}{3! \times 5!} + \frac{5!}{3! \times 2!} \\ &= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} + \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} + \frac{5 \times 4}{2} \\ &= 35 + 56 + 10 \\ &= 101 \quad \text{D'où} \end{aligned}$$

$$P(B) = \frac{\mathrm{Card}(B)}{1140} = \frac{101}{1140} \approx 0{,}0885$$

L'événement C est "au moins un des trois stagiaires pratique le ski nautique".
L'événement contraire de C est "aucun des trois stagiaires pratique le ski nautique"
Il correspond au choix de 3 stagiaires parmi les 15 qui ne font pas de ski nautique.
Son cardinal est alors :

$$\mathrm{Card}(\overline{C}) = C_{15}^3 = \frac{15!}{3! \times 12!} = 455$$

La probabilité de $\overline{C}$ est alors : $P(\overline{C}) = \frac{455}{1140}$

La probabilité de C est donc :

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{455}{1140} = \frac{685}{1140} \approx 0{,}6008$$

II.

a:
On sait qu'il y a chaque jour 1140 choix possibles de 3 stagiaires parmi les 20.
Choisir un groupe de 3 avec Christian revient à choisir Christian et 2 stagiaires parmi les 19 qui ne sont pas Christian.
Il y a 171 choix possibles de deux autres stagiaires. C'est le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi 19.
Parmi les 1140 groupes possibles de 3 stagiaires, il y a donc exactement 175 groupes qui contiennent Christian.
La probabilité que Christian soit choisi un jour donné est donc:

$$p = \frac{171}{1140} = 0{,}15$$

b:
Si on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois que Christian est choisi durant le séjour de 5 jours, X suit une loi binomiale de paramètre (n = 5 , *p* = 0,15).
Donc, pour tout k entier, on a

: $$P(X = k) = C_5^k (0{,}15)^k \times (0{,}85)^{5-k}$$

En particulier, la probabilité de ne jamais choisir Christian durant le séjour est :

$$P(X = 0) = C_5^0 (0{,}15)^0 \times (0{,}85)^5 = (0{,}85)^5 \approx 0{,}4437$$

c:

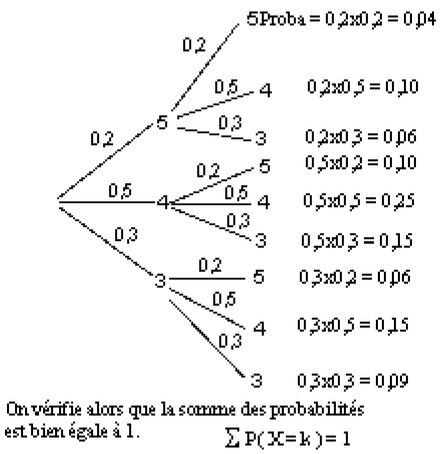
La probabilité de choisir exactement une fois Christian est :

$$P(X = 1) = C_5^1(0{,}15)^1 \times (0{,}85)^4 = 5 \times (0{,}15) \times (0{,}85)^4 \approx 0{,}3915$$

d:
La probabilité de choisir au moins 2 fois Christian est : P(X $\geq$ 2).
Or P(X $\geq$ 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1).
Les calculs précédents montrent bien alors que cette probabilité est inférieure à 0,2

Exercice3

Avant de commencer cet exercice, il faut mieux faire un arbre qui résume la situation.
Un joueur tire donc deux séries de 5 ballons. Pour chaque série, le joueur marque 3 ou 4 ou 5 buts avec des probabilités respectives de 0,2 ou 0,5 ou 0,3.
Ceci conduit alors à l'arbre suivant. Les probabilité calculées tiennent compte du fait que les résultats des tirs sont indépendants les uns des aures.



I. X est la variable aléatoire égale au nombre de buts réussis par un joueur au cours d'un entrainement. Les valeurs que peut prendre X sont donc:

6 ou 7 ou 8 ou 9 ou 10

a: Le joueur réussit tous ses tirs au but s'il marque 5 buts à chaque série.
Comme la probabilité de marquer 5 buts durant une série est 0,2 et que les résultat des séries de tirs sont indépendants, on a donc:
Probabilité de marqués 5 buts à chaque série = $(0{,}2)^2$ = 0,04.

b: On a vu que les valeurs que peut prendre X sont 6 - 7 - 8 - 9 - 10.
D'après l'arbre construit, on obtient alors :
P(X=6) = 0,3*0,3 = 0,09
P(X=7) = 0,3*0,5 + 0,5*0,3 = 0,30
P(X=8) = 0,3*0,2 + 0,5*0,5 + 0,2*0,3 = 0,37

P(X=9) = 0,5*0,2 + 0,2*0,5 = 0,20
P(X=10)=0,2*0,2 = 0,04.
On présente alors ces résultats sous forme de tableau:

Tableau : Loi de Probabilité de X					
X = k	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
P(X=k)	**0,09**	**0,30**	**0,37**	**0,20**	**0,04**

c: On vérifie que l'espérance de X est : E[X] = $\sum$ P(X=k).k = 7,8

II.
L'entrainement est réussi si le joueur marque au moins 8 buts durent deux séries.
On veut P(X $\geq$ 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10).
D'après le tableau précedent, on a donc:
P(X $\geq$ 8) = 0,37 + 0,20 + 0,04 = 0,61. C'est bien la valeur demandée.

III. Y est la variable aléatoire égale au nombre de séances d'entrainement réussies ou succès en 10 séances d'entrainement. Comme pour chaque séance, la probabilité que la séance soit un succès est *p* = 0,61 et que les résultats des séances sont supposés indépendants les une des autres, on voit alors que Y suit une loi Binomiale de paramètre (n = 10 , *p* = 0,61).

Donc pour tout k entier, on a : $P(Y = k) = C_{10}^{k}(0{,}61)^{k}(0{,}39)^{(10-k)}$

a: La probabilité que le joueur n'ait aucun échec lors des 10 séances est alors:

$$P(Y = 10) = C_{10}^{10}(0{,}61)^{10}(0{,}31)^{0} = (0{,}61)^{10} \approx 0{,}007133$$

b: La probabilité d'avoir exactement 6 succès est :

$$\begin{aligned} P(Y = 6) &= C_{10}^{6}(0{,}61)^{6}(0{,}39)^{4} \\ &= 210 \times (0{,}61)^{6} \times (0{,}39)^{4} \\ &\approx 0{,}25029 \end{aligned}$$

c: La probabilité d'avoir au moins un succès est :

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y = 0) \\ &= 1 - (0{,}39)^{10} \\ &\approx 0{,}999918 \end{aligned}$$

III. Pour n séances d'entrainement de suite, la probabilité que le joueur n'ait aucune succès est $(0{,}39)^{n}$. Donc la probabilité que le joueur ait au moins un succès est :
$1 - (0{,}39)^{n}$
On veut donc déterminer la plus petite valeur de n telle cette probabilité soit $\geq$ 0,99.

$$1-(0{,}39)^n \geq 0{,}99$$

$$0{,}01 \geq (0{,}39)^n \quad \text{D'où, en utilisant la fonction ln,}$$

$$\ln(0{,}01) \geq \ln(0{,}39^n) \quad \text{Et comme } \ln(x^n) = n\ln(x) \text{, pour } x > 0$$

$$\ln(0{,}01) \geq n.\ln(0{,}39) \quad \text{Or, } \ln(0{,}39) \text{ est } < 0 \text{ car } 0{,}39 \in]0;1[\text{, donc}$$

$$\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}39)} \leq n \quad \text{Comme } \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}39)} \approx 4{,}89 \text{ et que n est entier}$$

en constate alors que la plus petite valeur n telle que la
la probabilité d'avoir au moins un succès en n
entrainement soit supérieure à 0,99 est $n = 5$

Exercice4(non corrigé)

Exercice5

Il y a 10 boules au total dans l'urne. On en tire 5 simultanémént.

a: Le nombre de tirages possibles est le nombre de parties à 5 éléments dans un ensemble à 10 éléments. Ou le nombre de combinaisons de 5 éléments parmi 10.
Il y a donc C_{10}^5 tirages possibles de 5 boules de l'urne : $C_{10}^5 = 252$.
L'univers □ des tirages possibles
b: Si il y a équiprobabilité de tous les tirages, pour un événement donné A de □, la probabilité de A est :

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card□)}$$

i. L'événement A : "aucune boule noire" correspond aux tirages 5 boules de parmi les 5 boules non noires. Il y a 1 seul tirage possible: Card(A)=1

$$\text{Donc , } P(A) = \frac{1}{252}$$

ii. Il n' y a deux cas de figures possibles où un tirage contient autant de boules vertes que de boules blanches:
1° cas: 0 boule verte, 0 boule blanche et 5 boules noires: Nombre de cas = 1
2° cas: 1 verte, 1 blanche et 3 noires:Nombre de cas= $C_4^1 \times C_1^1 \times C_5^3 = 40$
Il y a donc au total 41 cas fovorables.
D'où la probabilité d'avoir autant de blanches que de vertes est : $\frac{41}{252}$

iii. L'événement contraire de "au moins une boule noire" est "aucune boule noire".
Donc P("au moins une noire") = 1 - P("aucune noire").
D'après la question i. , on a donc :

$$P(\text{"au moins une noire"}) = 1 - \frac{1}{252} = \frac{251}{252}$$

iv. L'événement "exactement 1 noire et exactement 1 verte" correspond au choix d'une noire parmi les 5 noires,

au choix d'une verte parmi la verte,
au choix de 3 blanches parmi les 4 blanches.
Le nombre de cas favorables à cet événement est donc:

$$C_5^1 \times C_1^1 \times C_4^3 = 5 \times 1 \times 4 = 20$$

$$\text{La probabilité de cet événement est donc : } \frac{20}{252} = \frac{5}{63}$$

Exercice6

a: Comme il y a 30 élèves dans la classe dont 20 filles, la probabilité que l'élève interrogé soit une fille est : 2/3

X est la variable aléatoire égale au nombre de filles interrogées durant n cours de mathématiques par le Professeur.
b Comme on suppose que le Professeur interroge de façon indépendante les élèves d'un cours à l'autre, pour chaque cours, la probabilité qu'une fille soit intérrogée est constament égale à *p* = $\frac{1}{3}$.
La variable X suit donc un loi Binomiale de parmètres (n , *p* = 2/3).

$$\text{Donc, pour tout k, on a : } P(X=k) = C_n^k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-k)} = C_n^k \frac{2^k}{3^n}$$

c: En particulier, pour n = 10 et k = 4 , on a:

$$P(X = 4) = C_{10}^4\frac{2^4}{3^{10}} = \frac{3360}{59049} = \frac{1120}{19683}$$

d: On cherche n tel que P(X = 0) < 0,001.

$$\text{Or , } P(X = 0) = \frac{1}{3^n} \text{ , on veut donc } \frac{1}{3^n} < 0{,}001$$

En utilisant la fonction ln (logarithme népérien) , on doit donc avoir :

$$\ln\left(\frac{1}{3^n}\right) < \ln(0{,}001) \text{ ou encore } -n.\ln(3) < \ln(0{,}001)$$

$$\text{Et donc } n > -\frac{\ln(0{,}001)}{\ln(3)} \approx 6{,}28$$

$$\text{On a donc } n = 7$$

e: Le nombre filles interrogées que l'on peut espérer est l'espérance de X.
On sait que l'espérance d'une variable alèatoire X suivant une loi Binomiale de paramètres (n , *p*) est : E[X] = n.*p*
Sur 36 cours de mathématiques, on peut donc espérer

$$36 \times \frac{2}{3} = 24$$

filles interrogées

Exercice7 (non corrigé)

Exercice8

Le sac S_1 contient 2 jetons noires et 1 jeton blanc. et tous les autres sac contiennent un jeton noir et 1 jeton blanc.
E_k est l'événement " le jeton tiré du sac k est blanc"
1:
a) D'après le texte , on a: $P(E_1) = \frac{1}{3}$, $P(E_2 / E_1) = \frac{2}{3}$, $P(E_2 / \overline{E_1}) = \frac{1}{3}$
D'après la loi des Probabilités Totales, on a donc :

$$\begin{aligned} P(E_2) &= P(E_2/E_1) \times P(E_1) + P(E_2/\overline{E_1}) \times P(\overline{E_1}) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

b) Si p_k est la probabilité de E_k, la probabilité de l'événement contraire de E_k est alors 1 -p_k.
Or, d'après le prinicipe de tirage des jetons, on a :

$$P(E_{k+1}/ E_k) = \frac{2}{3} \text{ et } P(E_{k+1} / \overline{E_k}) = \frac{1}{3}$$

Donc, toujours d'après la loi des Probabilités Totales, on a

$$\begin{aligned} P(E_{k+1}) &= P(E_{k+1} / E_k) \times P(E_k) + P(E_{k+1} / \overline{E_k}) \times P(\overline{E_k}) \\ &= \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}(1 - p_k) \\ &= \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

On a donc bien la relation : $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$

2:
a) Pour k entier quelconque ≥ 1 , on a :

$v_{k+1} = u_{k+1} - \frac{1}{2}$	d'après la définition de la relation entre les suites (u_k) et (v_k)
$= (\frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3}) - \frac{1}{2}$	d'après la définition de la relation entre u_{k+1} et u_k
$= \frac{1}{3}u_k - \frac{1}{6}$	Simple calcul !!
$= \frac{1}{3}(u_k - \frac{1}{2})$	en mettant $\frac{1}{3}$ en facteur
$= \frac{1}{3}v_k$	en revenant à la relation entre v_k et u_k .

La relation qui vient d'être démontrée entre v_{k+1} et v_k ne signifie rien d'autre que cette suite est bien géométrique de raison (1/3).
b) On connait l'expression du terme général d'indice n en fonction de n d'une suite géométrique.
Dans le cas de la suite (v_k) , on peut alors dire que pour tout k ≥ 1 , on a:
$v_k = v_1q^{k-1}$. Comme v_1 = (1/3) - (1/2) = -1/6 , on peut alors dire que :

$$v_k = -\frac{1}{6} \times \frac{1}{3^{k-1}} = -\frac{1}{2 \times 3^k}$$

De la relation entre u_k et v_k, on obtient alors :

$$u_k = v_k + \frac{1}{2}$$
$$u_k = -\frac{1}{2 \times 3^k} + \frac{1}{2}$$
$$u_k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^k}\right)$$

On sait que $\lim_{k \to +\infty} q^k = 0$ si et seulement si $|q| < 1$, donc

en particulier $\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{3^k} = 0$. On peut alors dire que :

$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^k}\right) = \frac{1}{2}$. On a donc :

$\lim_{k \to +\infty} u_k = \frac{1}{2}$. (u_k) converge donc vers $\frac{1}{2}$

3: La relation $0{,}4999 \leq p_k \leq 0{,}5$, donne , d'après l'expression de u_k en fonction de k, en remarquant que cette suite n'est rien d'autre que la suite p_k.

$$0{,}4999 \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^k}\right) \leq 0{,}5$$

On détermine alors sans difficulté, en utilisant la fonction logarithme, ou simplement par un calcul "machine", que k est ≥ 8.

Comme n = 10 , les valeurs de k solutions sont 8 ; 9 ; 10

Exercice9

1. a: D'après l'énoncé, la probabilité qu'a le gardien d'arrêter le tire (n+1), s'il a arrêté le tir n est 0,8: Donc $P(A_{n+1} / A_n) = 0{,}8$
   De même, la probabilité qu'il n'arrête le tire (n+1) s'il n'a pas arrêté le tir n est
   0,6. Donc, $P(A_{n+1} / \bar{A}_n) = 0{,}6$.

   b: D'après le principe des probablités conditionnelles, on a:
   $P(A_{n+1} \cap A_n) = P(A_{n+1} / A_n).P(A_n)$ donc $P(A_{n+1} \cap A_n) = 0{,}8.P(A_n)$
   De même, on a : $P(A_{n+1} \cap \bar{A}_n) = 0{,}6.P(\bar{A}_n)$

   c: D'après la loi des Probabilités Totales, on a:
   $P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \bar{A}_n) = P(A_{n+1})$
   Mais d'après la question précédente, on a aussi:
   $P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \bar{A}_n) = 0{,}8.P(A_n) + 0{,}6.P(\bar{A}_n)$.
   Comme $P(\bar{A}_n) = 1 - P(A_n)$, on comparant ces deux égalités, on peut écrire:
   $P(A_{n+1}) = 0{,}8.P(A_n) + 0{,}6.P(\bar{A}_n)$
   $= 0{,}8.P(A_n) + 0{,}6[1- P(A_n)]$
   $= 0{,}2.P(A_n) + 0{,}6$. ce qui est bien l'égalité demandée.
2. $p_n = P(A_n)$ et $u_n = p_n - 0{,}75$.
   a: Si n est un entier positif quelconque, alors on a:
   $u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}75$
   $= 0{,}2p_n + 0{,}6 - 0{,}75$, d'après la relation établie dans la

question 1.c:

$= 0{,}2p_n - 0{,}15$

$= 0{,}2[p_n - 0{,}75]$

$= 0{,}2.u_n$, d'après la définition de la suite (u).

La suite (u) est donc bien une suite géométrique de raison $r = 0{,}2$ et de premier terme$u_1 = p_1 - 0{,}75 = -0{,}05$.

b: L'expression de u_n en fonction de n est alors: $u_n = (-0{,}05).(0{,}2)^{n-1}$.

On en déduit alors l'expression de pn en fonction de n:

$$p_n = 0{,}75 -0{,}05.(0{,}2)^{n-1}$$

c: Comme $(0{,}2)^{n-1}$ tend vers 0 si n tend vers +*oo*, on en déduit que la suite (p) tend vers 0,75

Exercice10

Appelons E={a ; b; c; d ; f ; g ; p ; r }les résultats possibles sur une roue. Il y a 4 roues , l'ensemble des résultats possibles de ces 4 roues correspond alors au produit cartésien

$$ExExExE = E^4 = \square .$$

Le cardinal de cet ensemble est alors Card(E^4) = Card($\square$) = 8^4 .

On est en situation d'équiprobabilité.

1. E :" 4 fruits identiques" . Le cardinal de E est 8.

   Donc $P(E) = \dfrac{\text{Card}(E)}{8^4} = \dfrac{1}{8^3} \approx 0{,}00195$

   F : "3 fruits identiques et 3 seulement":

   Une éventualité de F correspond au choix de 2 fruits parmi les 8 fruits, a et b par exemple.

   Il y a C^2_8 = 28 façons de choisir ces 2 fruits. Puis, une fois le choix des 2 fruits {x ; y} , il y a 4 façons de placer le fruit x sur une des roues et d'attribuer alors les 3 places restantes à y. Même résultat si on place y sur une roue et x sur 3 roues.

   Le cardinal de F est alors : C^2_8x8 et donc :

   $$P(F) = \frac{28 \times 8}{8^4} \approx 0{,}05468$$

   G :" 4 fruits distincts"

   Il y a C^4_8 =70 façons de choisir 4 fruits distincts parmi les 8. Pour chaque choix de ces 4 fruits, il y a 4! = 24 façons de les placer sur les 4 roues.

   Le cardinal de G est donc : 70x24 = 1680. Donc:

   $$P(G) = \frac{1680}{8^4} \approx 0{,}41053$$

2. "X = 50" = "4 fruits identiques " = E

   "X = 5" = "3 fruits identiques (sous-entendu, 3 seulement)" = F

   "X = 1" = "4 fruits distincts" = G

   Donc : P(X=0) = 1- P(E) - P(F) - P(G). Il ne reste plus qu'à faire le calcul.

   L'epérance de X est : E[X] = P(X=0)x0 + P(X=1)x1 + P(X=5)x5 + P(X=50)x50.

   D'où:

   $$E[X] = \frac{25}{32}$$

Exercice11

D'après le texte, 15% sont Ma , parmi les malades Ma, 20 % sont Mb. Et parmi les non-Ma, 4 % sont Mb. Ceci peut se traduire, en utilisant les événements A et B par:

1. a) $P(A) = 0{,}15$: $P_A(B) = 0{,}20$: $P_{\bar{A}}(B)$
   b) On sait que $P(B \cap A) = P_A(B)P(A)$ donc : $P(B \cap A) = 0{,}15 \times 0{,}20 = 0{,}03$
   De même, $P(B \cap \bar{A}) = 0{,}85 \times 0{,}04 = 0{,}034$. car $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
   D'après la loi des Probabilités Totales, on a donc:
   $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = 0{,}03 + 0{,}034 = 0{,}064$.
   c) En utlisant la définition de la probabilités conditionnelles "A sachant B", comme on connait $P(B \cap A)$, on obtient : $P_B(A) = 0{,}46875$.
2. Dans cette question, on est obligé de supposer que les choix sont indépendants les uns des autres, sinon, on ne peut pas répondre aux questions.
   a)Dans ce cas, si X est la variable aléatoire correspondant au nombre d'individus atteints des maladies Ma et Mb, alors X suit une loi binômiale de paramètres
   $n = 10$ et $p = 0{,}03$.
   Donc, pour tout k compris entre 0 et 10, on a :
   $$P(X = k) = C_{10}^{k} \times (0{,}03)^{k} \times (0{,}97)^{10-k}$$
   b) En particulier, on cherche : $P(X \leq 2)$. Comme X prend des valeurs entières entre 0 et 10, on a donc : $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$.
   Ce qui donne : $P(X \leq 2) = (0{,}97)^{10} + 10(0{,}03)^{1}(0{,}97)^{9} + 45(0{,}03)^{2}(0{,}97)^{8}$

   dont une valeur approchée est : 0,997235

Exercice12

Il y a 10 boules dans l'urne, on effectue n tirages avec remise successivement donc l'univers Ω ,

ensemble de tous les tirages possibles a pour cardinal 10^n .

Pour un événement quelconque A de l'univers, comme il y a équiprobabilité des tirages,

la probabilité de A est: $p(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{10^n}$.

1:

a) Il y a 5 boules noires, donc, il y a 5^n façons de tirer n boules noires.

Même chose pour les boules blanches. Il y a donc 2.5^n façons de tirer toutes les boules de la même couleur.

La probabilité demandée est donc: $\frac{2.5^{n}}{10^{n}} = \frac{1}{2^{(n-1)}}$.

b) La probabilité de tirer en premier une boule blanche, puis (n-1) boules noires est : $\frac{1}{2^{n}}$.
Mais c'est la même probabilité que de tirer en seconde position une boule blanche et le reste que des boules noires, ou de tirer à la k-ème place une boule blanche et le reste que des boules noires. Comme il y n façons de choisir "l'emplacement" de la boule blanche,

on en déduit que la probabilité demandée est : $\frac{n}{2^{n}}$.

On peut aussi utiliser une loi binomiale: On appelle X le nombre de boules blanches obtenues après n tirages.
Pour chaque tirages, la probabilité d'obtenir une boule blanche est p=0,5. Les tirages sont indépendants.
Donc X suit la loi binomiale de paramètres n=5 , p=0,5.

"X --> B (n = 5 ; p = 0,5)"

On sait alors que pour tout k entier, P(X = k) = $C(n,k)\, p^{k}\,(1-p)^{(n-k)}$

où $C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$. Pour k=1, on a la réponse.

c) L'événement (A et B) correspond à " On obtient exactement une blanche", donc, d'après la question b),

on a bien p(A et B) = $\frac{n}{2^{n}}$.

A est l'événement contraire de " On obtient des boules toutes de même couleur", donc, d'après a),

on a: P(A) = 1- $\frac{1}{2^{(n-1)}}$.

B est la réunion disjointe des événements "On obtient que des boules noires" et " On obtient exactement une boule blanche", donc :

P(B)= $\frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}$

2: La réponse résulte directement de la réponse de la question précedente. Simple calcul.

3: Les trois premiers termes de cette suite sont: -1 ; 0 ; 3.

4: Pour n entier supérieur à 2, on a $U_{n+1} - U_n = 2^{(n-1)} - 1$, qui est bien strictement positif .

La suite est donc strictement croissante. Comme $U_3 = 0$, la seule valeur qui annule la suite est n = 3.
Donc les événements A et B sont indépendants si et seulement si n = 3.

Exercice13

Partie I

L'univers est l'ensemble des choix de sujets possibles par le candidat. Il en choisit 2 parmi 100,
donc le cardinal de l'univers est: $\frac{100!}{2!\,98!} = 4950$.

1: Le candidat ne connait aucun des deux sujets si et seulement si il les choisit parmi les 50 qu'il ne connait pas.
Il y a $\frac{50!}{2!\,48!} = 1225$ façons de faire un tel choix, donc, la probabilité que le candidat ne connaisse aucun des deux sujets est: $\frac{1225}{4950} = \frac{49}{198}$

2: C'est la même question car il connait exactement 50 sujets sur les 100 possibles.

3: Le candidat à 50*50 = 2500 façons de choisir les sujets et d'en connaitre exactement 1.
La probabilité qu'il a de choisir les sujets et d'en connaitre exactement 1 est donc: $\frac{2500}{4950} = \frac{50}{99}$

4: L'événement contraire est qu'il ne connaisse aucun des sujets.

Donc la probabilité demandée est: $1-\frac{49}{198}=\frac{149}{198}$.

Partie II

1: L'événement contraire de connaitre au moins un sujet est "ne connaitre aucun sujet". C'est à dire, de choisir les deux sujets parmi les (100-n) inconnus du candidats.

Il y a alors C(n;2) = $\frac{(100-n)!}{2!\,(100-n-2)!} = \frac{(100-n)\,(100-n-1)}{2}$. choix de sujets inconnus du candidat.

La probabilité que le candidat connaisse au moins un sujet est alors:

$$P_n = 1 - \frac{(100-n)\,(99-n)}{9900}$$

Ce qui se simplifie en:

$$P_n = \frac{199\,n}{9900} - \frac{1\,n^2}{9900}$$

2: Simple "inéquation" du second dégre. On trouve que n doit supérieur à 77.

Exercice14

Rappelons la loi des Probabilités Totales:

Si (A 1 , A 2 , A 3 , ..., An) forme une partition de l'univers E muni d'une probabilité P, alors pour tout événement B de E on a :

P(B) = P(B \ A 1).P(A 1) + P(B \ A 2).P(A 2) + ...+ P(B \ An).P(An)

1:
a:La probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 est donc:
P("1") = P("1" \ U 1).P(U 1) + P("1" \ U 2).P(U 2) = (1/2).(1/2) + (1/4).(1/2)
d'où P("1") = 3/8 = 0,375

b: On cherche la probabilité d'avoir choisi l'urne U 1 sachant que le jeton tiré porte le numéro 1,
à savoir: P(U 1 \ "1").

Or P(U1 \ "1") = P(U 1 et "1")/P("1") et P(U1 et "1") = P("1" \ U 1).P(U 1)
= (1/2).(1/2) = (1/4)
donc: P(U1 \ "1") = (1/4)/(3/8) = 2/3.

2:On tire 2 jetons parmi 6 simultanément. Le nombre de tirages possibles est donc C(6,2) = 15.

a: Il y a 2 façons d'obtenir 2 jetons portant le même numéro, à savoir 1,1 ou 2,2.
La probabilité demandée est donc 2/15.

b: Les valeurs que peut prendre S sont: 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7.

On a S=2 pour le tirage des 2 jetons portant le numéro 1 donc P(S=2) = 1/15

On a S=3 pour le tirage d'un numéro 1 et d'un numéro 2 donc P(S=3) = 4/15

On a S=4 pour le tirage d'un numéro 1 et d'un numéro 3 ou de deux numéros 2 donc P(S=4) = 3/15.

On continue ainsi et P(S=5) = 4/15 , P(S=6) = 2/15 et P(S=7) = 1/15.

On vérifie que $\sum P(S=k) = 1$.

L'espérance de S est :E[S]= $\sum P(S=k)\,k$ = 65/15 = 13/3.

c: On a P("X=-10") = P(S=3) + P(S=5) + P(S=7) = 9/15. Donc P("X=x") = 6/15.
L'espérance de X est alors:

E[X] = -10*(9/15) + x*(6/15) = -6 + (2/5)x.

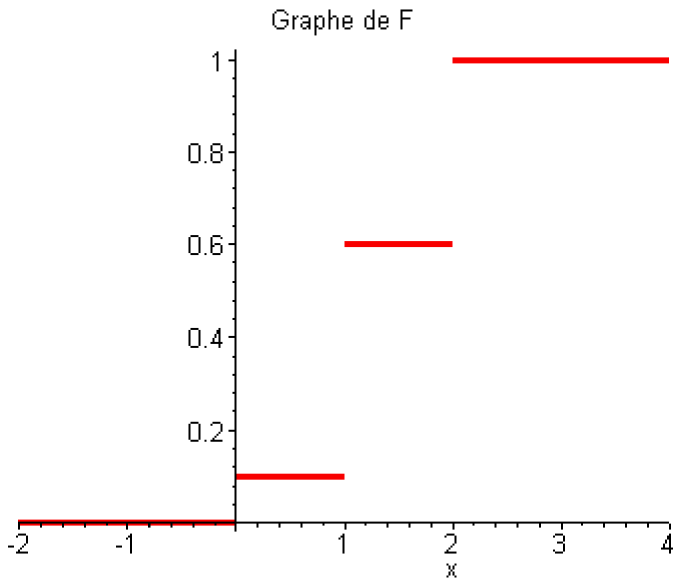
E[X] est nulle pour **x = (30/2) = 15.**

Exercice15

1:

a:La fonction de répartition F de X est définie par : F(x) = $p(x \leq X)$. D'où :

F(x) = 0 pour x<0 ; F(x) = 0,1 pour x dans [0;1[;
F(x) = 0,6 pour x dans [1;2[; F(x) = 1 pour x supérieur ou égal à 2.



b: L'espérance de X est E[X] = 1,3

2:

a: p(C1 et E) = p(E / C1).p(C1) = 0,7.0,5 = 0,35

b: p(E / C2) = 0,7.0,3 + 0,3.0,7 = 0,42 car si 2 clients se présentent, soit le premier achète de l'essence
et le second du gazole, soit le premier achète du gazole et le second de l'essence, et les choix des deux
clients sont indépendants.

A partir de là, comme p(C2 et E) = p(E / C2).p(C2), on a: P(C2 et E) = 0,42 . 0,4 = 0,168

c: D'après la loi des probabilités totales, on a, en appelant C0 l'événement " En cinq minutes, 0 client se présente":

p(E) = p(E et C0) + p(E et C1) + p(E et C2) = 0 + 0,35 + 0,168 = 0,518.

3: Y peut prendre les valeurs 0 , 1 et 2.
D'après la loi des probabilités totales, on a:
p(Y=0) = p(Y=0 / C0).p(C0) + p(Y=0 / C1).p(C1) + p(Y=0 / C2).p(C2)
= 0,1 + 0,3.0,5 + $(0,3)^2$.0,4
= 0,286

p(Y=1) = p(E) = 0,518

p(Y=2) = p(Y=2 / C0).p(C0) + p(Y=2 / C1).p(C1) + p(Y=2 / C2).p(C2)
= 0 + 0 + $(0,7)^2$.0,4
= 0,196.

On peut éviter le dernier calcul en remarquant que p(Y=2) = 1 - p(Y=0) - p(Y=1).

Exercice16

1: Il y a 7 couleurs donc, comme un domino a deux cases, il y a C(7 , 2) = 21 façons de former un domino
avec deux couleurs différentes. De plus, il y a 7 dominos dont les deux cases portent la même couleur.
Au total, il y a bien 28 dominos différents.

2: L'univers est l'ensemble des tirages simultanés de trois dominos parmi 28.
Son cardinal est donc : C(28 , 3) = 3276.

Obtenir exactement deux doubles parmi les trois dominos revient à choisir 2 dominos parmi les 7 doubles
et 1 dominos parmi les 21 qui ne sont pas des doubles.
Le nombre de choix possibles est donc : C(7 , 2)xC(21 , 1) = 21x21 = 441.
(Choix de deux "doubles" puis d'un "non-double")

La probabilité demandée est donc : (441 / 3276) = 7 / 52 .

3:
a: Il y a un seul domino portant 2 fois la couleur jaune donc P(J2) = (1 / 28).

b: Il y a 6 domino portant exactement une fois la couleur jaune donc P(J1) = (6 / 28) = (3 / 14).

c: Il y a donc 7 dominos portant au moins une fois la couleur jaune donc P(J) = (7 / 28) = 0,25.

4: Comme les tirages sont indépendants et qu'à chaque tirage, la probabilité de J est p = 0,25 ,
le nombre de fois X que J se réalise en n tirages suit une loi binomiale X -> B(n ; p = 0,25) .

La probabilité que J ne se réalise pas en n tirages est $(0,75)^n$.

Donc la probabilté que J se réalise au moins une fois est: $P_n = 1 - (0,75)^n$.

La plus petite valeur telle P_n soit supérieur ou égal à 0,99 est (**No = 17**) que l'on détermine en plaçant par la fonction logarithme.

Exercice17

1: Si X est le nombre réponse correcte du candidat sur les cinq questions, comme ses réponses sont
indépendantes et que la probabilité pour chaque question d'avoir une reponse correcte est (p = 0,25),

on peut dire que X suit une loi binomiale de paramètre (n = 5) et (p = 0,25), et pour tout k entier,

$$\mathbf{P(X=k) = C_5^k\,(0{,}25)^k(0{,}75)^{(5-k)}}$$

a: P(A) = 0,25 , réponse évidente.
P(B) = P(X supérieur ou égal à 2)
= 1 - P(X = 0) - P(X = 1)
= 1 - $(0{,}75)^5$ - 5.(0,25).$(0{,}75)^4$ = (47 / 128) = 0,3671875.

b: Si la candidat obtient un note 4 pour une réponse correcte et une note (-1) pour une réponse incorrecte,
alors la variable aléatoire N correspondant au nombre total de ses points s'exprime en fonction de X de la façon suivante:

$$\mathbf{N = 4X + (5-X)(-1) = 5X - 5}$$

L'événement "N supérieur ou égal à 10" s'écrit alors "X supérieur ou égal à 3".

La probabilité pour le candidat d'obtenir une note au moins égale à 10 est donc:

P = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)
= P(B) - P(X=2) = (47 / 128) - (135 / 512) = (53 / 512).

2: Si le candidat connaît lé réponse correcte à deux questions, il a déjà 8 points.
La probabilité demandée est alrs celle de l'événement suivant " Obtenir au moins 2 points en 3 questions",
ce qui correspond à "Avoir au moins une réponse correcte en 3 questions".
L'événement contraire est "Aucune réponse correcte en 3 questions".

La probabilité demandée est donc : 1 -$(0{,}75)^3$ = (37 / 64) = 0,578125.

Exercice18

1)
a)Le premier chosit 2 sujets parmi les 20 possibles. Il a donc C^2_{20} = 190 choix possibles.
Comme il a exactement 10 choix pour 2 sujets venant du même examinateur, on a bien:

P(A) = $\frac{1}{19}$

b) Si le premier candidat a choisi 2 sujets venant du même examinateur, alors il reste au deuxième candidat 18 sujets. Il a alors C^2_{18} = 153 choix. Il a exactement 9 choix de 2 sujets venant du même examinateur donc la probabilité qu'à le deuxième candidat de choisir 2 sujets venant du même examinateur sachant que le premier candidat a fait de même est :

$P(A_2 / A_1) = \frac{9}{153} = \frac{1}{17}$

c) D'après le principe des probabilités conditionnelles, on a donc bien :

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2/ A_1\,)P(A_1) = \frac{1}{19} \times \frac{1}{17} = \frac{1}{323}$

2)
a) Si le premier candidat n'a pas tiré deux sujets venant du même examinateur, le second candidat a toujours C^2_{18} choix pour les deux sujets, mais il n' a que 8 choix pour avoir deux

sujets du même examinateur. Donc: $P(A_2 / \overline{A}_1) = \frac{8}{153}$

b) D'après la loi des Probabilités Totales, on a :

$P(A_2) = P(A_2/ A_1)P(A_1) + P(A_2 / \overline{A}_1)P(\overline{A}_1) = P(A_2/ A_1)P(A_1) + P(A_2 / \overline{A}_1)(1-P(A_1))$

D'où :

$$P(A_2) = \frac{1}{17} \times \frac{1}{19} + \frac{8}{153} \times \frac{18}{19} = \frac{1}{19} .$$

En utilisant alors la relation : $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$, on obtient bien après un simple calcul : $P(A_1 \cup A_2) = \frac{33}{323}$

Remarquons que l'on peut alors former le tableau suivant qui résume les probabilités calculées et qui permet de déduire celles qui manque:

	A_1	$\overline{A}_1$	
A_2	$\frac{1}{323}$	$\frac{16}{323}$	$\frac{1}{19}$
$\overline{A}_2$	$\frac{16}{323}$	$\frac{290}{323}$	$\frac{18}{19}$
Total	$\frac{1}{19}$	$\frac{18}{19}$	1

3)

a) D'après les questions précédentes, on a :

$P(X= 2) = P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{323}$

$P(X = 1) = P(A_1 \cap \overline{A}_2) + P(\overline{A}_1 \cap A_2)$

$= [1-P(A_2 / A_1)]P(A_1) + P(A_2 / \overline{A}_1)P(\overline{A}_1)$

$= \frac{32}{323}$

$P(X = 0) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = \frac{290}{323}$

b) $E[X] = \frac{34}{323}$