

Exercices fonction définies par intégrale

Guesmi.B

Exercice 1 Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{\frac{t}{1+t}} dt$

- 1) Justifier l'existence de F
- 2) vérifier que $\forall x \in [0, 1]$ on a: $0 \leq x \leq \sqrt{x} \leq 1$
- 3) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $1 - \frac{1}{t+1} \leq \sqrt{\frac{t}{t+1}} \leq 1$
- 4) Encadrer $F(x)$ puis justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ quand $x \rightarrow +\infty$

Exercice 2 calculer $I_n = \int_1^e x^n \log x dx$

Exercice 3 soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2-1} dt$

- 1) *Etudier* la parité de f
- 2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer $f'(x)$
- 3) Montrer que $\forall x \geq 0$; $f(x) \leq \int_0^x \frac{1}{e} dt$ en déduire la position de C (courbe de f) par rapport au point d'abscisse nulle
- 4) a) Prouver que $\forall x \geq 0$ on a: $f(x) \leq \int_0^x e^{-2t} dt$, en déduire que f est borné sur $\mathbb{R}_+$
b) Déduire que f possède une limite L quand $x \rightarrow +\infty$
c) Démontrer que $L \leq \frac{1}{2}$
d) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera
- 5) Tracer l'allure de C

Exercice 4 soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, on considère $g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t) dt$

- 1) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$
- 2) Déterminer $g'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$