Similitudes et coniques

EXERCICE1 Guesmi.B

Le pan est rapporté à un repère R=$(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ soit (E) =$\{M(x,y) tel\ que\ 15x^2+13y^2-2\sqrt{3}xy=768\}$

Soit f :P→P

M→f(M)=M'(x',y') verif

iant$\begin{cases} x'=\frac{1}{4}(x+\sqrt{3}y) \\ y'=\frac{1}{4}(-\sqrt{3}x+y) \end{cases}$ (1)

1)a)montrer que f est une similitude plane directe que l'on caractérisera

b)Déterminer f^{-1}

2)a)déterminer une équation de f(E)

b)montrer que f(E) est une ellipse dont on précisera les sommets ; les foyers et l'excentricité

3)en déduire que (E) est l'ensemble des points M du plan vérifiant $MF_1+MF_1'=16$

Ou F_1 et F_1' sont deux points que l'on déterminera

EXERCICE2

Soit (E) l'ensemble des points dont les coordonnées dans un repère orthonormé direct

R=$(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ vérifient (E) $13(x^2+y^2)-24xy-25=0$ (1)

1)soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$

Déterminer une équation de la courbe r(E).

2)préciser sa nature et ses éléments caractéristiques

3) en déduire la nature et les éléments caractéristiques de (E)

CORRECTION

EXERCICE1

1)on remarque f(O)=O

OM'=$\sqrt{x'^2+y'^2}=\frac{1}{4}\sqrt{4(x^2+y^2)}=\frac{1}{2}OM$

Donc f est une similitude de rapport $\frac{1}{2}$

Son angle = ?   on a : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{2}OM^2cos(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}})$ (2)

Mais $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = xx' + yy' = \frac{1}{4}OM^2$ (3)

(2) et (3) donnent $\cos(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}) = \frac{1}{2}$ (4)

Calculons $\det(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}) = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{4}(x+\sqrt{3}y) \\ y & \frac{1}{4}(-\sqrt{3}x+y) \end{vmatrix} = \frac{-\sqrt{3}}{4}OM^2$

D'autre part $\det(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}) = OM.OM'\sin(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}})$

Et vu que OM'=1/2(OM) donc $\sin(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ (5)

Donc (4) et (5) donnent que l'angle de la similitude est $(\frac{-\pi}{3})$

Donc f est la similitude directe de centre O de rapport (1/2) et d'angle$(\frac{\pi}{3})$

$f^{-1}=S(O,2,\frac{\pi}{3})$

2)Le système (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - \sqrt{3}y' \\ y = \sqrt{3}x' + y' \end{cases}$ (2)

Un point M (x ;y) vérifie

(E)$\Leftrightarrow 15(x' - \sqrt{3}y')^2 + 13(\sqrt{3}x' + y')^2 - 2\sqrt{3}(x' - \sqrt{3}y')(\sqrt{3}x' + y') = 768$

Apres développement on obtient

$24x'^2 + 27y'^2 = 384$ (7)

C'est l'équation d'une ellipse

$\frac{x'^2}{(4)^2} + \frac{y'^2}{(\frac{8\sqrt{2}}{3})^2} = 1$ ellipse poson a=4 et b=$\frac{8\sqrt{2}}{3}$ on a a>b

Donc l'axe focal est (AA') avec A(4 ;0) A'(-4,0) l'axe non focal est (BB') avec B(0,b) B'(0 ;-b)

Soit c=$\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{4}{3}$ donc

L'excentricité e=$\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$ le foyer F(c ;0) F'(-c,0)

3) on a f(E) est l'ellipse (E') de foyer F et F' définie précédemment $\Leftrightarrow$E=f^{-1}(E')

Mais f^{-1} ext une similitude de rapport 2

De plus si M'=f(M) ; M'ϵ(E')$\Leftrightarrow$M'F+M'F'=2a=2x4=8 $\Leftrightarrow$Mϵ(E) ellipse fe foyers $F_1=f^{-1}(F)$ et $F'_1=f^{-1}(F')$

$\Leftrightarrow MF_1+MF'_1=2x(2a)=16$

EXERCICE2

CORRECTION Rappel

1)Si M(x ;y) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ et r une rotation de centre O et d'angle Ɵ alors si M'=r(M)

On a M'(x' ;y')

$\begin{cases} x' = \cos\theta\ x - \sin\theta\ y \\ y' = \sin\theta\ x + \cos\theta\ y \end{cases}$ donc si Ɵ=$\frac{\pi}{4}$

$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y') \end{cases}$ (k) si M(x ;y) est un point de (E)

Alors M'=r(M) est un point de (E') vérifiant la relation (1) $\Leftrightarrow x'^2 + \frac{y'^2}{5^2} = 1$ (2)

2)C'est une ellipse posons a=1 et b=5 on a a<b soit alors c=$\sqrt{b^2 - a^2} = 2\sqrt{6}$

Les foyers F(0, $2\sqrt{6}$); F'(0,-$2\sqrt{6}$) les sommets de l'axe focal sont B(0,5) ;B'(0,-5)

Excentricité e=$\frac{c}{b}$

Directrice associée à F ; D :y=$\frac{b^2}{c} = \frac{25}{2\sqrt{6}}$

Directrice associée à F' ; D' :y=-$\frac{25}{2\sqrt{6}}$

3)Mϵ(E)$\Leftrightarrow$r(M)ϵ(E')$\Leftrightarrow$Mϵr^{-1}(E') or r^{-1} est une rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{4}$

Donc (E) est une ellipse de foyer $F_1(2\sqrt{3}\ ;2\sqrt{3})$; $F_1'(-2\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$ (a partir de (k))

De sommet de l'axe focal $B_1(\frac{5}{\sqrt{2}};\frac{5}{\sqrt{2}})$;$B_1'(-\frac{5}{\sqrt{2}}; -\frac{5}{\sqrt{2}})$