

EXERCICES CORRIGES (3^è+4^è annee)

(4^{ème})

Exercice 1 Valeur exacte du cosinus et du sinus de $\pi/12$

On considère les deux nombres complexes suivants :

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. Déterminer les écritures sous formes algébrique, exponentielle et trigonométrique de $z_1 z_2$.
3. En déduire la valeur exacte du cosinus et sinus suivants :

$$\cos \frac{\pi}{12} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12}$$

Exercice 2 Des pistes pour démontrer qu'un complexe est réel ou imaginaire pur

Démontrer les équivalences suivantes :

$$Z \text{ réel} \Leftrightarrow Z = \bar{Z}$$

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = 0 \text{ [}\pi\text{)})$$

$$Z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow Z + \bar{Z} = 0$$

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = \frac{\pi}{2} \text{ [}\pi\text{)})$$

Applications :

1. Comment choisir le nombre complexe z pour que $Z = z^2 + 2z - 3$ soit réel ?
Soit E l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que Z soit réel. Déterminer E .
2. On considère les points A et B d'affixes respectives i et 1 . Soit M un point du plan d'affixe z distinct de A .
On pose
$$Z = \frac{1-z}{i-z}$$

Déterminer l'ensemble E des points M tels que Z soit réel.
Déterminer l'ensemble F des points M tels que Z soit imaginaire pur.

(4^{ème})

Exercice 3 Écriture complexe de transformations

1. Soit f la transformation du plan complexe qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que :

$$z' = az + 3i$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f lorsque $a = 2$, puis lorsque $a = -i$

2. On donne $A(1)$, $B(2+i)$, $A'(2i)$ et $B'(1+i)$.

Vérifier que $AB = A'B'$.

Démontrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$. La déterminer.

Exercice 4 Lieux de points

Soit z un nombre complexe différent de 1 . On note M le point du plan complexe d'affixe z . On pose $Z = \frac{z+i}{z-1}$.

Déterminer l'ensemble :

1. E des points M tels que Z soit réel.
2. F des points M tels que $|Z| = 1$.
3. G des points M tels que $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} \text{ [}2\pi\text{]}$.

Exercice 5 Utilisation des nombres complexes pour établir une propriété algébrique

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On suppose que a et b sont la somme de deux carrés :

$$\text{il existe } x, y \in \mathbb{Z} \text{ tels que } a = x^2 + y^2 \text{ et il existe } z, t \in \mathbb{Z} \text{ tels que } b = z^2 + t^2$$

Démontrer que le produit ab est encore la somme de deux carrés. (Idée : écrire $(x^2 + y^2) = |x + iy|^2$ etc...)

Exercice 6 Identité du parallélogramme

Démontrer que pour tous nombres complexes Z et Z' , on a :

$$|Z + Z'|^2 + |Z - Z'|^2 = 2|Z|^2 + 2|Z'|^2$$

$$\text{(Indication : utiliser la relation : } |Z|^2 = Z\bar{Z} \text{)}$$

Interpréter géométriquement.

(4ème) **Exercice 7** Racines de l'unité. Applications

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité tout nombre complexe z tel que :

$$z^n = 1$$

On note \mathbb{U}_n l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Par exemple, $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$.

1. Démontrer que :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i \frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}$$

Démontrer que la somme des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité est nulle.

Démontrer que, dans repère orthonormal direct $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$, les images A_k ($0 \leq k \leq n-1$) des nombres

$\omega_k = e^{i \frac{2ik\pi}{n}}$ sont les sommets d'un polygone régulier.

2. Applications :

a) Soit $Z \in \mathbb{C}$. On appelle racine $n^{\text{ème}}$ de Z tout nombre complexe tel que :

$$z^n = Z$$

Soit $R = |Z|$ et Θ un argument de Z . Démontrer que Z admet les n racines $n^{\text{èmes}}$ suivantes :

$$\sqrt[n]{R} e^{i \left(\frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)}, 0 \leq k \leq n-1$$

b) Soit f la fonction polynôme définie par :

$$f(x) = x^4 + 1$$

Déterminer les racines quatrièmes de -1 puis en déduire que f peut s'écrire comme un produit de deux fonctions polynômes de degré 2 à coefficients réels.

c) Soit z un nombre complexe tel que : $1 + z^4 + z^8 = 0$

Démontrer que z est une racine $12^{\text{ème}}$ de l'unité.

Exercice 8 Transformation de $a \cos x + b \sin x$

Soient a et b deux réels. Démontrer qu'il existe deux réels R et θ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$a \cos x + b \sin x = R \cos(x - \theta)$$

Application : résoudre, sur \mathbb{R} , l'équation : $\cos x + \sin x = 1$

(4ème) Exercice 9 Calcul de la valeur exacte de $\cos(2\pi/5)$ et $\cos(4\pi/5)$

Pour connaître le but de cet exercice, se reporter à la question 5.

1. Résoudre, dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, le système suivant :

$$\begin{cases} u + v = -\frac{1}{2} \\ uv = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

2. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Démontrer que : $\omega^0 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$

En déduire (à l'aide des formules d'Euler) que :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$$

3. Démontrer que :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

et

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

4. En déduire que : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4}$

5. Démontrer que : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$

Exercice 10 Carrés et parallélogramme

ABC est un triangle de sens direct.

DBA est un triangle isocèle et rectangle en D de sens direct.

ACE est un triangle isocèle et rectangle en E de sens direct.

On construit le point L tel que $\vec{CL} = \vec{DB}$.

1. Faire une figure.

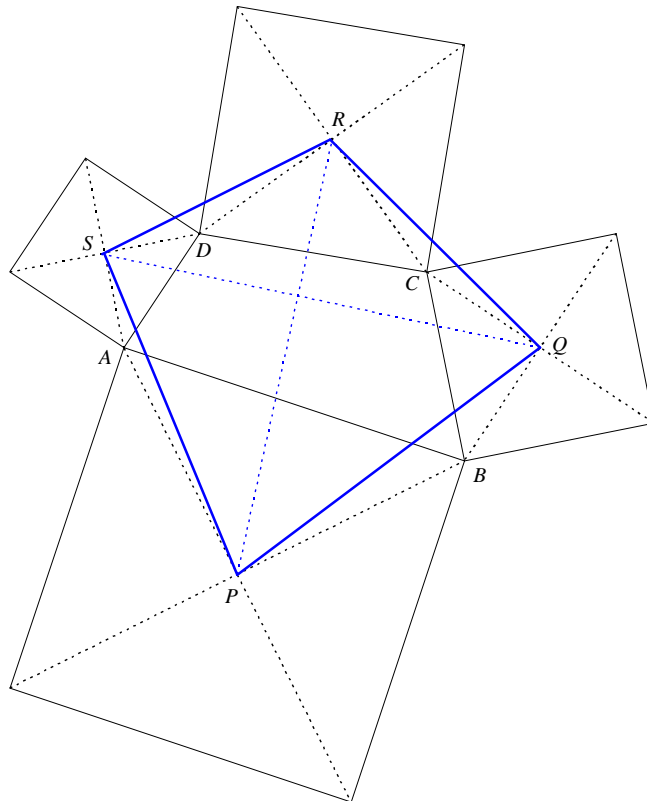
2. Démontrer que EDL est un triangle rectangle isocèle en E de sens direct.

Exercice 11 Des carrés autour d'un quadrilatère (Théorème de Von Aubel)

On considère un quadrilatère $ABCD$ de sens direct.

On construit quatre carrés de centres respectifs P , Q , R et S qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ du quadrilatère $ABCD$. (Voir figure)

Le but du problème est de démontrer que les diagonales du quadrilatère $PQRS$ sont perpendiculaires et de même longueur.



On note a , b , c , d , p , q , r et s les affixes respectives des points A , B , C , D , P , Q , R et S dans un repère orthonormé $(O, \overline{e_1}, \overline{e_2})$ de sens direct.

1. Démontrer que dans le carré construit sur $[AB]$, on a :

$$p = \frac{a - ib}{1 - i}$$

Établir des relations analogues pour q , r et s en raisonnant dans les trois autres carrés.

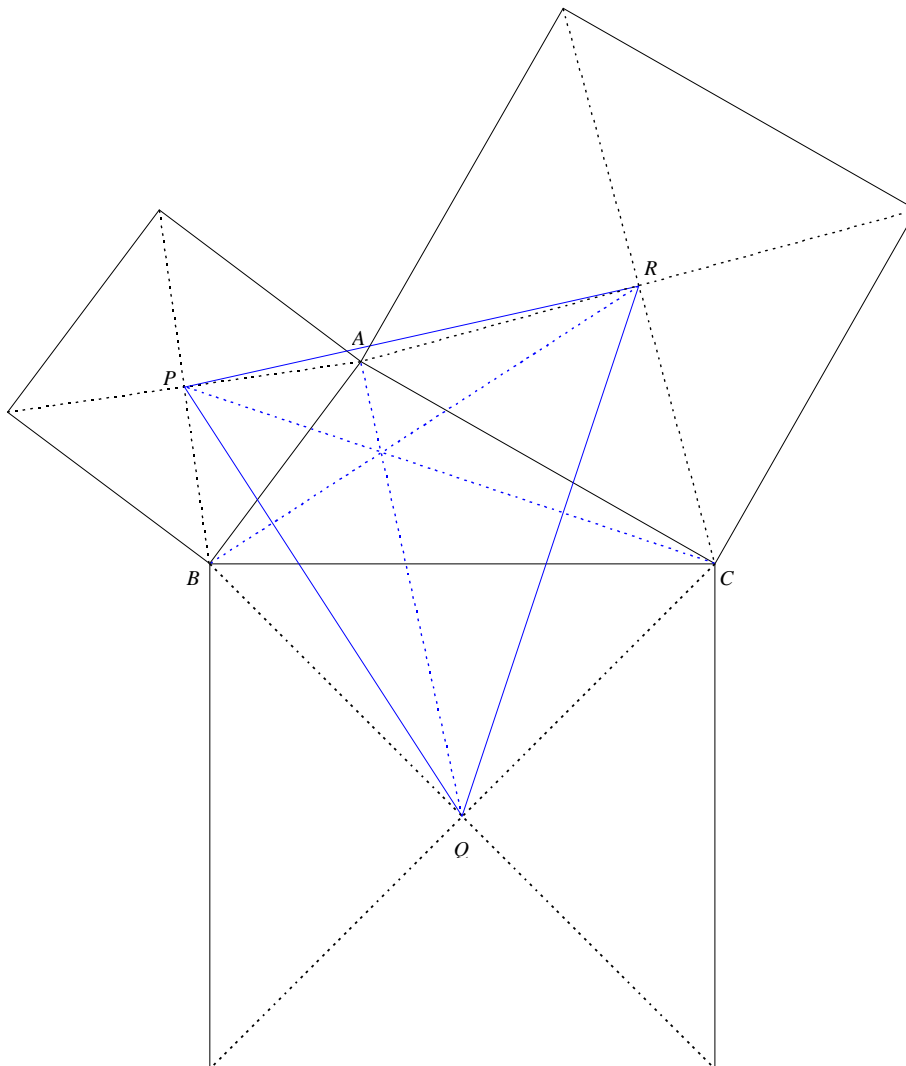
2. Calculer : $\frac{s - q}{r - p}$

Conclure.

Exercice 12 Des carrés autour d'un triangle (Point de Vecten)

On considère un triangle ABC de sens direct.

On construit trois carrés de centres respectifs P , Q et R qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ du triangle ABC . (Voir figure)



On note a , b , c , p , q et r les affixes respectives des points A , B , C , P , Q et R dans un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de sens direct.

1. Démontrer que les triangles ABC et PQR ont le même centre de gravité.
2. Démontrer que dans le carré construit sur $[AB]$, on a :

$$p = \frac{a - ib}{1 - i}$$

Établir des relations analogues pour q et r en raisonnant dans les deux autres carrés.

3. Démontrer que les droites (AQ) et (PR) sont perpendiculaires
En déduire que les droites (AQ) , (BR) et (CP) sont concourantes.

Information : ce point de concours s'appelle "point de Vecten" du triangle ABC .

(4ème) Exercice 13 *Théorème de Napoléon*

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \overline{e_1}, \overline{e_2})$ de sens direct.

PARTIE A : *des caractérisations du triangle équilatéral*

On note $\mathbf{j} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Soient U, V et W trois points du plan d'affixes respectives u, v et w .

1. Démontrer l'équivalence suivante :

$$UVW \text{ est équilatéral de sens direct } \Leftrightarrow u - v = -\mathbf{j}^2(w - v)$$

2. Démontrer l'équivalence suivante :

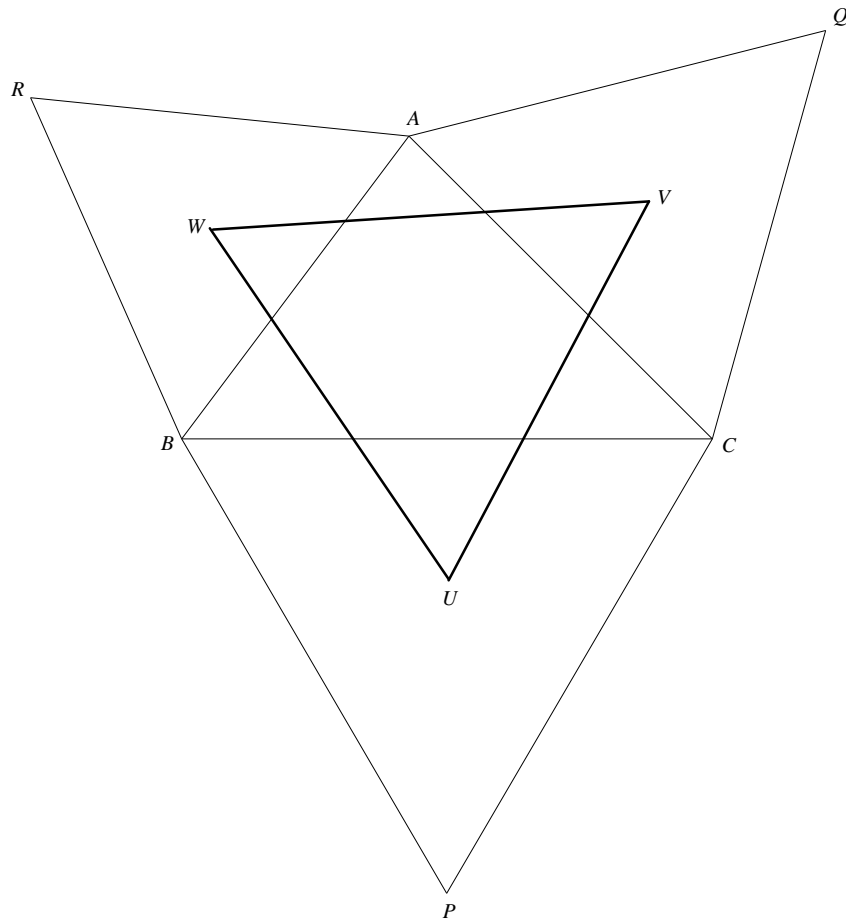
$$UVW \text{ est équilatéral de sens direct } \Leftrightarrow u + \mathbf{j}v + \mathbf{j}^2w = 0$$

PARTIE B : *démonstration du théorème de Napoléon*

ABC est un triangle quelconque de sens direct. On construit les points P, Q et R tels que BPC, CQA et ARB soient des triangles équilatéraux de sens direct.

On note U, V et W les centres de gravité de BPC, CQA et ARB respectivement.

Démontrer que UVW est équilatéral de même centre de gravité que ABC .



Exercice 14 *Nombres complexes et suites*

Le but de cet exercice est l'étude de la suite (S_n) définie, pour $n \geq 2$, par :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

1. On pose, pour $n \geq 2$:

$$z = e^{\frac{i\pi}{n}}$$

Calculer la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k$$

2. Montrer que, pour $n \geq 2$:

$$\frac{2}{1-z} = 1 + i \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

3. En déduire que, pour $n \geq 2$:

$$S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

4. Étudier la limite de la suite (u_n) définie, pour $n \geq 2$, par :

$$u_n = \frac{S_n}{n}$$

Exercice 1 Valeur exacte du cosinus et du sinus de $\pi/12$

1. On a :
$$z_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Forme algébrique de $z_1 z_2$:

$$z_1 z_2 = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Forme exponentielle de $z_1 z_2$:
$$z_1 z_2 = e^{i \frac{\pi}{3}} e^{-i \frac{\pi}{4}} = e^{i \frac{\pi}{12}}$$

Forme trigonométrique de $z_1 z_2$:
$$z_1 z_2 = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$$

3. En identifiant la forme trigonométrique avec la forme algébrique de $z_1 z_2$, il vient :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Exercice 2 Des pistes pour démontrer qu'un complexe est réel ou imaginaire pur

D'une part :
$$Z \text{ est réel} \Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z - \bar{Z} = 0 \Leftrightarrow Z = \bar{Z}$$

$$Z \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z + \bar{Z} = 0$$

D'autre part :

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = 0 [2\pi] \text{ ou } \arg(Z) = \pi [2\pi]) \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = 0 [\pi])$$

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } \arg(Z) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]) \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = \frac{\pi}{2} [\pi])$$

Applications :

1. D'après ce qui précède et d'après les propriétés de la conjugaison :

$$Z \text{ réel} \Leftrightarrow Z = \bar{Z} \Leftrightarrow z^2 + 2z - 3 = \bar{z}^2 + 2\bar{z} - 3 \Leftrightarrow (z - \bar{z})[(z + \bar{z}) + 2] = 0$$

$$Z \text{ réel} \Leftrightarrow (z = \bar{z} \text{ ou } 2\text{Re}(z) = -2) \Leftrightarrow (z \text{ réel ou } \text{Re}(z) = -1)$$

L'ensemble E recherché est l'union des deux droites d'équations respectives $y = 0$ et $x = -1$.

2. Détermination de E :

On rappelle que $z \neq i$. Autrement dit M est distinct de A . On a alors :

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg Z = 0 [\pi]) \Leftrightarrow (z = 1 \text{ ou } \arg \left(\frac{z - z_B}{z - z_A} \right) = 0 [\pi]) \Leftrightarrow (M = B \text{ ou } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = 0 [\pi])$$

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A, M \text{ et } B \text{ alignés, } M \neq A$$

On en déduit : E est la droite (AB) privée du point A

Détermination de F :

On rappelle que $z \neq i$. On a alors :

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = \frac{\pi}{2} [\pi]) \Leftrightarrow (z = 1 \text{ ou } \arg \left(\frac{z - z_B}{z - z_A} \right) = \frac{\pi}{2} [\pi])$$

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (M = B \text{ ou } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} [\pi])$$

D'où : F est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A

Exercice 3 Écriture complexe de transformations

1. $a = 2$

Montrons que f admet un unique point invariant. Pour cela on résout l'équation :

$$f(\omega) = \omega$$

$$\omega = 2\omega + 3i$$

$$\omega = -3i$$

La transformation f admet un unique point invariant Ω d'affixe $\omega = -3i$.

Pour déterminer la nature de f on exprime $z' - \omega$ en fonction de $z - \omega$.

$$\text{On a : } \begin{cases} z' = 2z + 3i \\ \omega = 2\omega + 3i \end{cases}$$

En soustrayant, membre à membre, ces deux égalités, on obtient :

$$z' - \omega = 2(z - \omega)$$

On en déduit, grâce à son écriture complexe, que f est l'homothétie de centre $\Omega(-3i)$ et de rapport $k = 2$.

$a = -i$

Montrons que f admet un unique point invariant. Pour cela on résout l'équation :

$$f(\omega) = \omega$$

$$\omega = -i\omega + 3i$$

$$\omega = \frac{3i}{1+i} = \frac{3+3i}{2}$$

La transformation f admet un unique point invariant Ω d'affixe $\omega = \frac{3+3i}{2}$.

Pour déterminer la nature de f on exprime $z' - \omega$ en fonction de $z - \omega$.

$$\text{On a : } \begin{cases} z' = -iz + 3i \\ \omega = i\omega + 3i \end{cases}$$

En soustrayant, membre à membre, ces deux égalités, on obtient :

$$z' - \omega = -i(z - \omega)$$

On en déduit, grâce à son écriture complexe, que f est rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

2. On a :

$$AB = A'B' = \sqrt{2}$$

Soit r une rotation de centre Ω et d'angle θ . Son écriture complexe est :

$$z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$$

Montrons que l'on peut choisir, de manière unique, $\omega \in \mathbb{C}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$.

$$\text{La condition } r(A) = A' \text{ donne : } 2i - \omega = e^{i\theta} (1 - \omega)$$

$$\text{La condition } r(B) = B' \text{ donne : } 1 + i - \omega = e^{i\theta} (2 + i - \omega)$$

$$\text{En soustrayant membre à membre : } i - 1 = e^{i\theta} (-1 - i)$$

$$\text{D'où : } e^{i\theta} = -i$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{On en déduit : } 2i - \omega = -i(1 - \omega)$$

$$\omega = \frac{3+3i}{2}$$

La transformation cherchée est la rotation de centre Ω d'affixe $\frac{3+3i}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 Lieux de points

L'idée est de se ramener à une expression du type $Z = \frac{z - z_A}{z - z_B}$ afin de pouvoir l'interpréter géométriquement.

Introduisons pour y parvenir le point A d'affixe $-i$ et le point B d'affixe 1 .

1. On a ainsi :

$$Z \text{ réel} \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = 0 [\pi]) \Leftrightarrow (z = z_A \text{ ou } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0 [\pi])$$

$$\text{Or, } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0 [\pi] \Leftrightarrow M \text{ appartient à la droite } (AB) \text{ privée de } A \text{ et } B$$

On en déduit finalement :

E est la droite (AB) privée de B

$$2. \quad |Z| = 2 \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \text{ appartient à la médiatrice de } [AB]$$

F est la médiatrice de $[AB]$

$$3. \quad \arg(Z) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

G est le demi-cercle de diamètre $[AB]$, privé de B , tel que le triangle AMB soit direct

Exercice 5 Utilisation des nombres complexes pour établir une propriété algébrique

$$\text{On a :} \quad ab = |x + iy|^2 |z + it|^2$$

$$\text{Et d'après les propriétés des modules :} \quad ab = |(x + iy)(z + it)|^2$$

$$ab = |(xz - yt) + i(yz + xt)|^2$$

$$ab = (xz - yt)^2 + (yz + xt)^2$$

Or, $xz - yt \in \mathbb{Z}$ et $yz + xt \in \mathbb{Z}$, donc ab est aussi la somme de deux carrés.

Exercice 6 Identité du parallélogramme

On a :

$$|Z + Z'|^2 + |Z - Z'|^2 = (Z + Z')(\bar{Z} + \bar{Z}') + (Z - Z')(\bar{Z} - \bar{Z}') = Z\bar{Z} + Z\bar{Z}' + Z'\bar{Z} + Z'\bar{Z}' + Z\bar{Z} - Z\bar{Z}' - Z'\bar{Z} + Z'\bar{Z}'$$

$$|Z + Z'|^2 + |Z - Z'|^2 = 2|Z|^2 + 2|Z'|^2$$

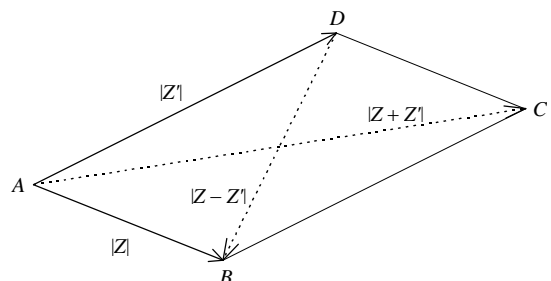
Interprétation :

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Notons Z l'affixe de \overrightarrow{AB} et Z' l'affixe de \overrightarrow{AD} .

On a donc :

$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$$

Autrement dit : dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés



Exercice 7 Racines de l'unité. Applications

1. Déjà, pour tout nombre complexe ω_k défini pour $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ par $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, on a :

$$\omega_k^n = e^{2ik\pi} = 1$$

Les éléments de \mathbb{U}_n sont bien des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

Réciproquement, soit z une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité :

$$z^n = 1$$

Notons r le module de z et θ l'argument de z situé dans $[0, 2\pi[$. Ainsi, on a :

$$r^n e^{in\theta} = 1 = e^{i0}$$

Or, deux nombres complexes égaux ont même module et des arguments égaux (modulo 2π), d'où :

$$r^n = 1 \text{ et } n\theta \equiv 0 [2\pi]$$

Comme r est un réel positif, on a nécessairement $r = 1$. D'autre part, l'égalité $n\theta \equiv 0 [2\pi]$ signifie qu'il existe un entier relatif k tel que :

$$n\theta = 2k\pi$$

$$\theta = \frac{2k\pi}{n}$$

Et comme on a choisi $\theta \in [0, 2\pi[$, il vient :

$$0 \leq k < n$$

Et comme k est un entier :

$$0 \leq k \leq n-1$$

Il y a donc exactement n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité qui sont les nombres ω_k pour $0 \leq k \leq n-1$:

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}$$

Avec les notations précédentes, et en notant $\omega = \omega_1$, on constate que :

$$\omega_k = \omega^k$$

La formule de sommation de termes consécutifs d'une suite géométrique donne alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0 \text{ puisque } \omega^n = 1$$

De plus, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a :

$$(\overline{OA_k}, \overline{OA_{k+1}}) = \arg\left(\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k}\right) = \frac{2i\pi}{n} [2\pi]$$

On a noté, par commodité :
 $\omega_n = \omega_0 = 1$ et $A_n = A_0$

On en déduit que $A_0A_1\dots A_{n-1}$ est un polygone régulier.

2. Applications :

a) On procède comme pour les racines de l'unité. Soit $z = r e^{i\theta} \in \mathbb{C}$.

On a :

$$z^n = Z \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = R e^{i\Theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = R \\ n\theta \equiv \Theta [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{R} \\ \theta \equiv \frac{\Theta}{n} \left[\frac{2\pi}{n} \right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{R} \\ \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Et comme on peut toujours choisir $\theta \in \left[\frac{\Theta}{n}, \frac{\Theta}{n} + 2\pi \right[$, il vient :

$$0 \leq k \leq n-1$$

Les racines $n^{\text{èmes}}$ de Z sont donc les n nombres complexes suivants :

$$\sqrt[n]{\text{Re}} \, i^{\left(\frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

Remarque : si on connaît déjà une racine $n^{\text{ème}}$ particulière z_0 de Z , on peut en déduire toutes les autres en multipliant z_0 par les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. En effet :

$$(z_0^n = Z \text{ et } z^n = Z) \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \text{ tel que } \frac{z}{z_0} = \omega_k$$

D'où : $(z_0^n = Z \text{ et } z^n = Z) \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \text{ tel que } z = \omega_k z_0$

b) Les racines quatrièmes de l'unité sont : $1, -1, i$ et $-i$

On connaît une racine quatrième particulière de -1 :

$$e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Les racines quatrièmes de -1 sont donc :

$$e^{i\frac{\pi}{4}}, -e^{i\frac{\pi}{4}}, ie^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } -ie^{i\frac{\pi}{4}}$$

C'est-à-dire :

$$e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{-i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}} \text{ et } e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

Or, les racines de $x^4 + 1$ sont précisément les racines quatrièmes de -1 . On a donc la factorisation :

$$f(x) = x^4 + 1 = \left(x - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \left(x - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \left(x - e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) \left(x - e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)$$

En regroupant les racines deux par deux (en choisissant celles qui sont conjuguées), on obtient :

$$f(x) = \left(x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{4} + 1\right) \left(x^2 - 2x \cos \frac{3\pi}{4} + 1\right)$$

$$f(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1) (x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

Nota : les amateurs de forme canonique peuvent retrouver ce résultat sans passer par les complexes :

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1) (x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

c) On sait que : $1 + z^4 + z^8 = 0$

En multipliant par z : $z + z^5 + z^9 = 0$

Puis encore : $z^2 + z^6 + z^{10} = 0$

$$z^3 + z^7 + z^{11} = 0$$

En sommant les quatre égalités, membre à membre :

$$\sum_{k=0}^{11} z^k = 0$$

Il est clair que z ne peut pas être égal à 1. La formule de sommation de termes consécutifs d'une suite géométrique donne alors :

$$\frac{1-z^{12}}{1-z} = 0$$

D'où : $z^{12} = 1$

Donc z est une racine douzième de l'unité.

Exercice 8 Transformation de $a \cos x + b \sin x$

Si $a = b = 0$, il suffit de choisir $R = 0$ et θ quelconque.

Supposons $(a, b) \neq (0, 0)$ et posons $Z = a + ib$. On a donc $Z \neq 0$.

Notons : $R = |Z|$ et θ un argument de Z .

On sait qu'alors : $a = |Z| \cos \theta$ et $b = |Z| \sin \theta$

On a ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$a \cos x + b \sin x = R(\cos \theta \cos x + \sin \theta \sin x)$$

Et d'après les formules d'additions :

$$a \cos x + b \sin x = R \cos(x - \theta)$$

Application :

En utilisant ce qui précède en posant $Z = 1 + i$ ($R = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{4} [2\pi]$), l'équation proposée s'écrit :

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$$

D'où : $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ ou $x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

$$x = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } x = 0 [2\pi]$$

Exercice 9 Calcul de la valeur exacte de $\cos(2\pi/5)$ et $\cos(4\pi/5)$

1. On procède par substitution. La première équation donne :

$$v = -u - \frac{1}{2}$$

En remplaçant v par $-u - \frac{1}{2}$ dans la seconde équation, il vient :

$$u\left(-u - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

En multipliant par -4 et en développant :

$$4u^2 + 2u - 1 = 0$$

On obtient une équation du second degré. Son discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 20$$

Comme $\Delta > 0$, il y a donc deux racines réelles distinctes :

$$u_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \text{ et } u_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

On en déduit les valeurs de v correspondantes :

$$v_1 = -u_1 - \frac{1}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad v_2 = -u_2 - \frac{1}{2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$$

Conclusion : le système admet deux couples de solutions :

$$S = \left\{ \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \right); \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \right) \right\}$$

2. Il s'agit de la somme de cinq termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $e^{i\frac{2\pi}{5}}$. On a donc :

$$\omega^0 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1 - \omega^5}{1 - \omega} = 0 \quad \text{car} \quad \omega^5 = 1$$

D'où :

$$1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}} = 0$$

Or :

$$\frac{6\pi}{5} \equiv -\frac{4\pi}{5} [2\pi] \quad \text{et} \quad \frac{8\pi}{5} \equiv -\frac{2\pi}{5} [2\pi]$$

On peut donc écrire :

$$1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} = 0$$

Et d'après les formules d'Euler :

$$1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$$

3. D'après les formules d'additions :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

4. En additionnant, membre à membre, les deux égalités ci-dessus et en utilisant la question 2. :

$$-\frac{1}{2} = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4}$$

5. Posons $u = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $v = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. On constate que :

$$\begin{cases} u + v = -\frac{1}{2} \\ uv = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

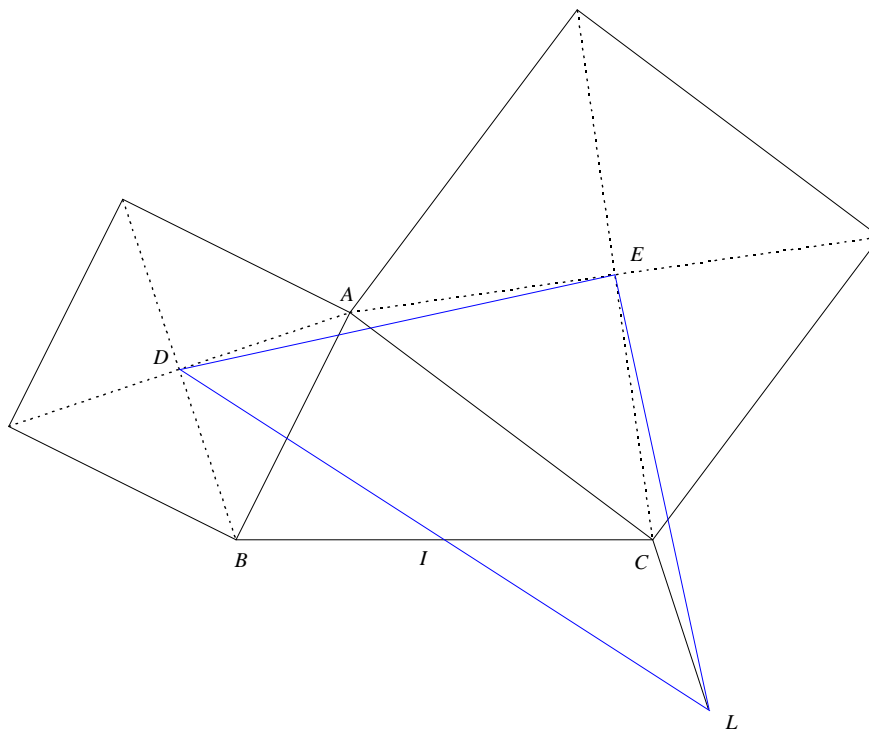
Or, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ car $\frac{2\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) < 0$ car $\frac{4\pi}{5} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

D'après la question 1, on en déduit :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$$

Exercice 10 Carrés et parallélogramme

1. Figure



2. Munissons le plan d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Notons a, b, c, d, e et l les affixes respectives des points A, B, C, D, E et L .

Comme A est l'image de B par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$:

$$a - d = \mathbf{i}(b - d)$$

De même dans ACE :

$$c - e = \mathbf{i}(a - e)$$

Enfin, puisque L est l'image de C par la translation de vecteur \vec{DB} :

$$l = c + b - d$$

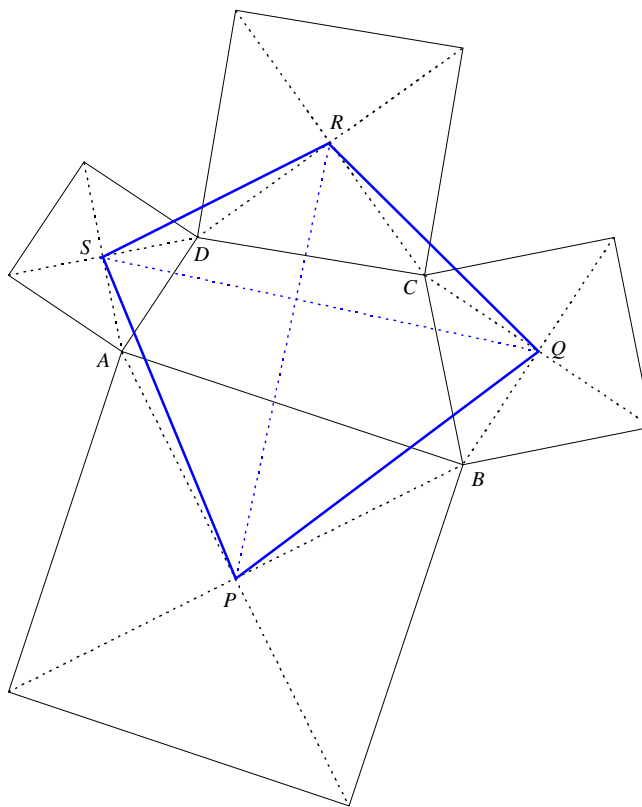
Exprimons $l - e$ en fonction de $d - e$:

$$l - e = c - e + b - d = \mathbf{i}(a - e) - \mathbf{i}(a - d) = \mathbf{i}(d - e)$$

Donc L est l'image de D par la rotation de centre E et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Le triangle EDL est bien rectangle isocèle en E de sens direct.

Exercice 11 Des carrés autour d'un quadrilatère (Théorème de Von Aubel)



1. Puisque $ABCD$ est de sens direct et que P est le centre du carré construit extérieurement sur $[AB]$, on peut affirmer que A est l'image de B par la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$:

$$a - p = \mathbf{i}(b - p)$$

$$a - \mathbf{i}b = p - \mathbf{i}p$$

D'où :

$$p = \frac{a - \mathbf{i}b}{1 - \mathbf{i}}$$

On obtient de même :

$$q = \frac{b - \mathbf{i}c}{1 - \mathbf{i}}, \quad r = \frac{c - \mathbf{i}d}{1 - \mathbf{i}} \quad \text{et} \quad s = \frac{d - \mathbf{i}a}{1 - \mathbf{i}}$$

2. On a alors :

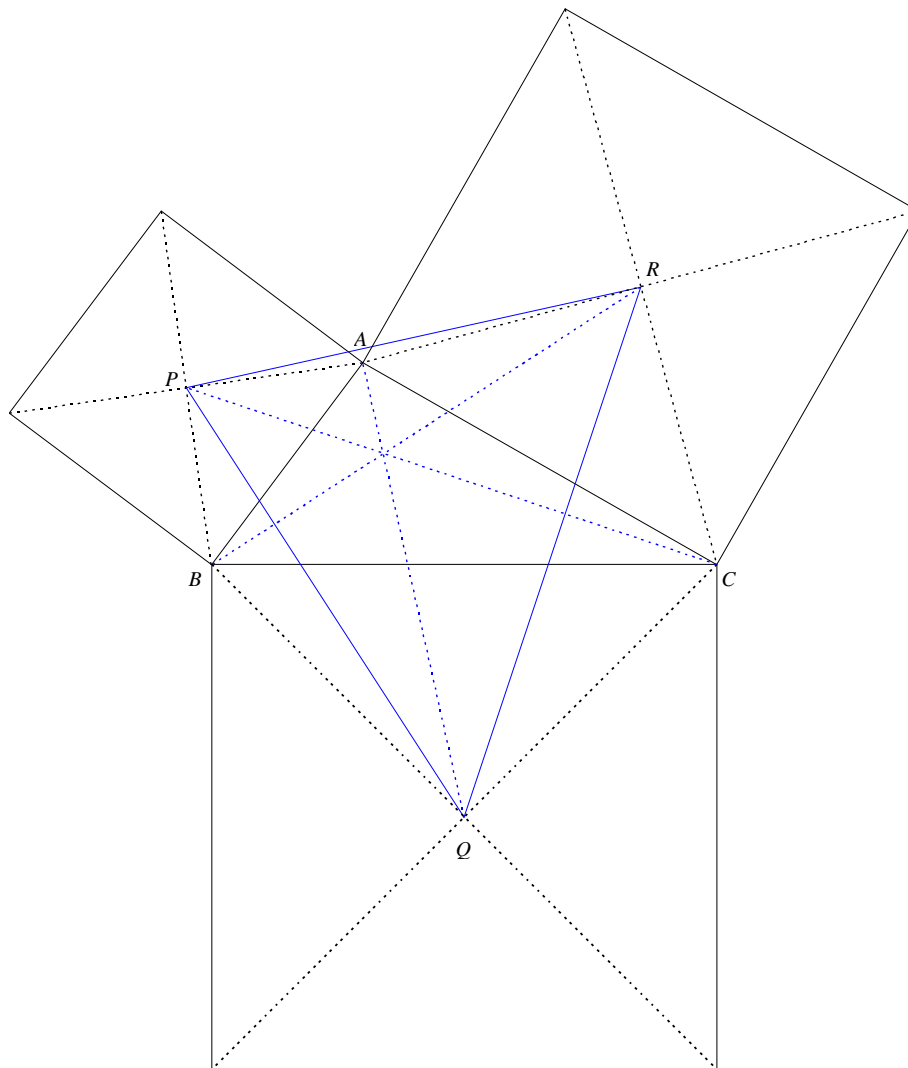
$$\frac{s - q}{r - p} = \frac{d - b + \mathbf{i}(c - a)}{c - a + \mathbf{i}(b - d)} = \mathbf{i}$$

On en déduit, d'une part, que les droites (PR) et (QS) sont perpendiculaires.

De plus, comme $\left| \frac{s - q}{r - p} \right| = 1$, on a : $PR = QS$

Les diagonales du quadrilatère $PQRS$ sont donc perpendiculaires et de même longueur.

Exercice 12 Des carrés autour d'un triangle (Point de Vecten)



1. Comme A est l'image de B par la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$:

$$a - p = \mathbf{i}(b - p)$$

De même :

$$b - q = \mathbf{i}(c - q)$$

$$c - r = \mathbf{i}(a - r)$$

En additionnant membre à membre ces trois égalités :

$$a + b + c - (p + q + r) = \mathbf{i}(a + b + c - (p + q + r))$$

D'où :

$$a + b + c = p + q + r$$

2. De la relation $a - p = \mathbf{i}(b - p)$ on déduit : $p = \frac{a - \mathbf{i}b}{1 - \mathbf{i}}$

De même : $q = \frac{b - \mathbf{i}c}{1 - \mathbf{i}}$ et $r = \frac{c - \mathbf{i}a}{1 - \mathbf{i}}$

3. On a :
$$\frac{r-p}{q-a} = \frac{c-a+i(b-a)}{b-a+i(a-c)} = i$$

On en déduit que les droites (PR) et (AQ) sont perpendiculaires. Autrement dit :

(AQ) est la hauteur issue de A dans le triangle PQR

En raisonnant de même par rapport aux autres côtés, on constate que (BR) et (CP) sont les deux autres hauteurs du triangle PQR .

Les droites (AQ) , (BR) et (CP) sont donc concourantes.

Exercice 13 *Théorème de Napoléon*

PARTIE A : des caractérisations du triangle équilatéral

1. Si UVW est équilatéral de sens direct, alors U est l'image de W par la rotation de centre V et d'angle $\frac{\pi}{3}$:

$$u - v = e^{\frac{i\pi}{3}} (w - v)$$

Or :

$$-j^2 = -e^{\frac{4i\pi}{3}} = -e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{i\pi} e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

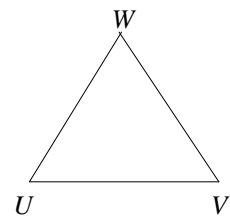
D'où :

$$u - v = -j^2(w - v)$$

Réciproquement, supposons :

$$u - v = -j^2(w - v) = e^{\frac{i\pi}{3}} (w - v)$$

Alors, U est l'image de W par la rotation de centre V et d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc UVW est équilatéral de sens direct.



2. Supposons UVW équilatéral de sens direct. D'après ce qui précède, on a :

$$u - v = -j^2(w - v)$$

$$u + (-1 - j^2)v + j^2w = 0$$

Or, $1 + j + j^2 = 0$ donc :

$$u + jv + j^2w = 0$$

Réciproquement, supposons :

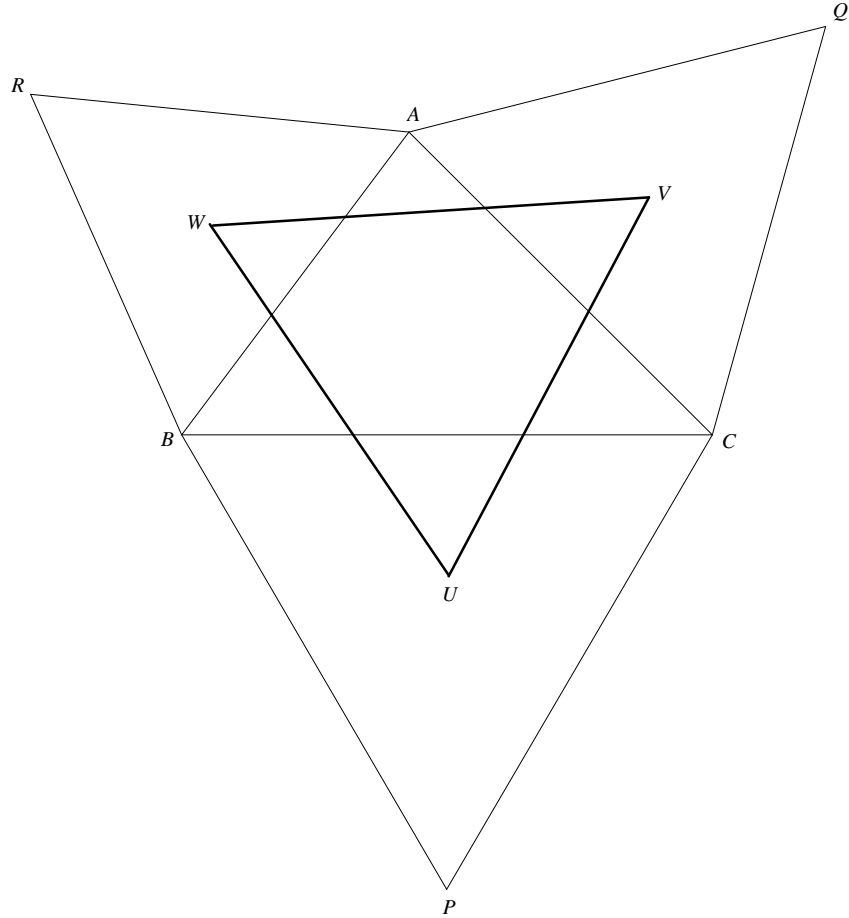
$$u + jv + j^2w = 0$$

Alors, par le même calcul :

$$u - v = -j^2(w - v)$$

Et d'après la question 1. :

UVW équilatéral de sens direct



PARTIE B : démonstration du théorème de Napoléon

Par hypothèse, on a :

$$a - w = \mathbf{j}(b - w) \quad (E_1)$$

$$b - u = \mathbf{j}(c - u) \quad (E_2)$$

$$c - v = \mathbf{j}(a - v) \quad (E_3)$$

En additionnant, membre à membre, les trois égalités, il vient :

$$a + b + c - (u + v + w) = \mathbf{j}(a + b + c - (u + v + w))$$

D'où :

$$a + b + c = u + v + w$$

Ce qui prouve déjà que UVW a le même centre de gravité que ABC .

De (E_1) on déduit :

$$w = \frac{a - \mathbf{j}b}{1 - \mathbf{j}}$$

De même avec (E_2) et (E_3) :

$$u = \frac{b - \mathbf{j}c}{1 - \mathbf{j}}$$

$$v = \frac{c - \mathbf{j}a}{1 - \mathbf{j}}$$

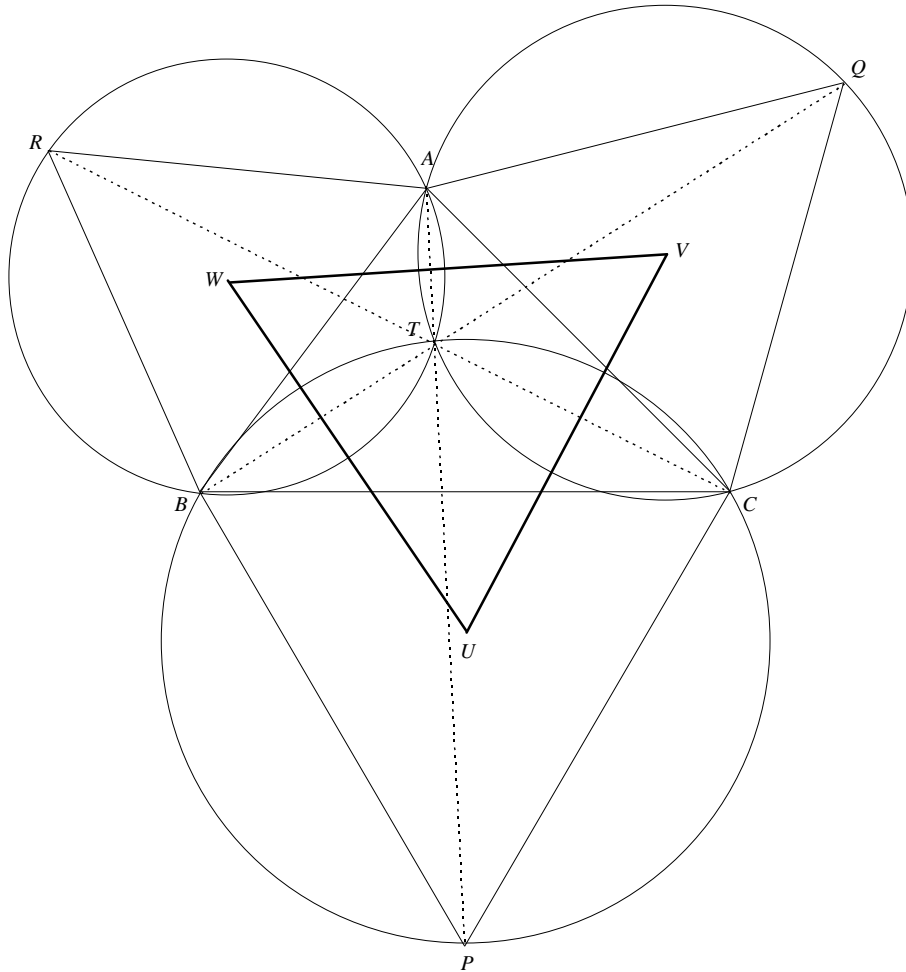
On calcule maintenant :

$$u + \mathbf{j}v + \mathbf{j}^2w = \frac{a - \mathbf{j}b + \mathbf{j}b - \mathbf{j}^2c + \mathbf{j}^2c - a}{1 - \mathbf{j}} = 0$$

Donc :

UVW est équilatéral de sens direct

Remarque : pour aller plus loin avec cette configuration, on peut aussi démontrer que les droites (AP) , (BQ) et (CR) sont concourantes en un point T appelé "point de Torricelli". Ce point T possède de belles propriétés : il est le point de concours des cercles circonscrits aux triangles ABC , ABR , ACQ et BCP , c'est aussi le point qui rend minimal la distance $MA + MB + MC$ (lorsque les angles du triangle sont inférieurs à 120°).



Exercice 14 *Nombres complexes et suites*

1. Il s'agit d'une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $z \neq 1$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{2}{1-z} \quad \text{car } z^n = e^{i\pi} = -1$$

2. On a, pour tout $n \geq 2$:

$$1-z = 1 - e^{i\frac{\pi}{2n}} = e^{i\frac{\pi}{2n}} \left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}} \right) = -2i e^{i\frac{\pi}{2n}} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

D'où :

$$\frac{2}{1-z} = \frac{i e^{i\frac{\pi}{2n}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{i \left(\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 1 + i \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

3. En identifiant les parties imaginaires, on obtient :

$$S_n = \operatorname{Im}\left(\frac{2}{1-z}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

4. On a, pour tout $n \geq 2$:

$$u_n = \frac{1}{n \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

$$u_n = \frac{2}{\pi} \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

Or, on sait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 1$$

$$\text{(Car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1)$$

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 1$, il vient finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{\pi}$$

On dit que la suite (S_n) converge "en moyenne" vers $\frac{2}{\pi}$.