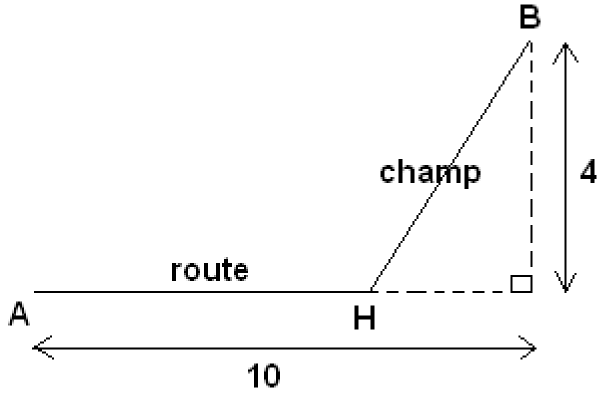
ETUDE D'UNE FONCTION RACINE

Une voiture 4x4 doit aller d'un point A situé sur une route à un point B en traversant un champ.



Sachant que sa vitesse sur la route est de 40 km/h et que sa vitesse à travers champs est de 20 km/h, déterminer la position du point H pour que le temps mis pour aller de A à B soit minimal.

CORRECTION

Notons x la distance AH. Ainsi $x \in [0;10]$

Entre A et H, la vitesse étant égale à 40 km/h , le temps de parcours est égal à $\frac{x}{40}$ heures

Entre H et B, la vitesse étant égale à 20 km/h , le temps de parcours est égal à $\frac{HB}{20}$ heures

Grâce au théorème de Pythagore, on établit que $HB = \sqrt{(10-x)^2 + 4^2} = \sqrt{x^2 - 20x + 116}$

La durée du trajet entre A et B s'exprime en fonction de x grâce à la fonction définie sur [0 ;10] par : $f(x) = \frac{x}{40} + \frac{\sqrt{x^2 - 20x + 116}}{20}$

La fonction f est dérivable sur [0 ;10] et pour tout $x \in [0;10]$, $f'(x) = \frac{1}{40} + \frac{1}{20}\frac{2x-20}{2\sqrt{x^2 - 20x + 116}}$

On transforme l'expression : $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 20x + 116} + 2x - 20}{40\sqrt{x^2 - 20x + 116}}$

Puisque pour tout $x \in [0;10]$, $40\sqrt{x^2 - 20x + 116} > 0$, l'étude du signe de $f'(x)$ se ramène à celle du signe de $\sqrt{x^2 - 20x + 116} + 2x - 20$

On résout l'inéquation

$\sqrt{x^2 - 20x + 116} + 2x - 20 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 20x + 116} > 20 - 2x$

Puisque $x \in [0;10]$, $20 - 2x \geq 0$.

Les deux quantités étant positives, l'inéquation $\sqrt{x^2 - 20x + 116} > 20 - 2x$ est équivalente à

$\left(\sqrt{x^2 - 20x + 116}\right)^2 > (20 - 2x)^2$ c'est-à-dire à

$x^2 - 20x + 116 > 400 - 80x + 4x^2$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 60x + 284 < 0$

En calculant le discriminant de l'expression $3x^2 - 60x + 284$, on obtient $\Delta = (-60)^2 - 4 \times 3 \times 284 = 192$

Le trinôme admet donc deux racines réelles $x_1 = \frac{60 - \sqrt{192}}{6} = \frac{60 - 8\sqrt{3}}{6} = \frac{30 - 4\sqrt{3}}{3} = 10 - \frac{4}{3}\sqrt{3} > 0$ et $x_2 = 10 + \frac{4}{3}\sqrt{3}$

D'après la règle du signe d'un trinôme,

pour tout $x \in]x_1;x_2[$, $3x^2 - 60x + 284 < 0$, et pour tout $x \in]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$, $3x^2 - 60x + 284 > 0$

Mais puisque $x_2 > 10$, l'ensemble de solutions de l'inéquation $\sqrt{x^2 - 20x + 116} > 20 - 2x$ est donc $S =]x_1;10] = \left]10 - \frac{4}{3}\sqrt{3};10\right]$.

Ainsi, pour tout $x \in]x_1;10]$, $f'(x) > 0$.

La fonction *f* est donc strictement décroissante sur $[0;x_1]$ et strictement croissante sur $[x_1;10]$.

Elle admet donc un minimum pour $x_1 = 10 - \frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 7,69\,km$

La voiture doit donc quitter la route après 7,69 km environ