

ETUDE D'UNE FONCTION RATIONNELLE

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; 10]$ par $g(x) = \frac{4x^2 - 36x}{x - 12}$

1. On note g' la fonction dérivée de g sur l'intervalle $]0 ; 10]$.

a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0 ; 10]$, calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) = \frac{4(x-6)(x-18)}{(x-12)^2}$

b. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; 10]$.

CORRECTION

1) a) La fonction g est dérivable sur $]0 ; 10]$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas sur $]0 ; 10]$, et pour tout $x \in]0 ; 10]$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(8x - 36)(x - 12) - (4x^2 - 36x) \times 1}{(x - 12)^2} = \frac{8x^2 - 96x - 36x + 432 - 4x^2 + 36x}{(x - 12)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 96x + 432}{(x - 12)^2} = \frac{4(x^2 - 24x + 108)}{(x - 12)^2} \end{aligned}$$

$$\text{On vérifie que pour tout } x \in]0 ; 10], \frac{4(x-6)(x-18)}{(x-12)^2} = \frac{4(x^2 - 18x - 6x + 108)}{(x-12)^2} = \frac{4(x^2 - 24x + 108)}{(x-12)^2} = g'(x)$$

D'où l'égalité
$$g'(x) = \frac{4(x-6)(x-18)}{(x-12)^2}$$

b) Puisque pour tout $x \in]0 ; 10]$, $(x - 12)^2 > 0$, le signe de $g'(x)$ sera identique à celui de l'expression $4(x - 6)(x - 18)$, dont les racines sont 6 et 18

D'après la règle des signes d'un trinôme du second degré, on peut dresser le tableau de signes de $g'(x)$:

x	0	6	10
$g'(x)$	—	0	+

On en déduit que g est strictement croissante sur $]0 ; 6]$ et strictement décroissante sur $[6 ; 10]$