

ETUDE D'UNE FONCTION RATIONNELLE

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 6}$. Etudier les variations de cette fonction.

CORRECTION

f est définie pour toutes les valeurs de x telles que $x^2 + x - 6 \neq 0$. La résolution de l'équation $x^2 + x - 6 = 0$, via le calcul de son discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 = 5^2$ conduit aux deux solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2} = -3$

et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} = 2$. L'ensemble de définition de f est donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\} =]-\infty; -3[\cup]-3; 2[\cup]2; +\infty[$

Pour tout $x \in]-\infty; -3[\cup]-3; 2[\cup]2; +\infty[$, puisque $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 6} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow u'(x) = 2x + 3$

et $v(x) = x^2 + x - 6 \Rightarrow v'(x) = 2x + 1$ donc on calcule :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{(2x+3)(x^2+x-6) - (x^2+3x+2)(2x+1)}{(x^2+x-6)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 2x^2 - 12x + 3x^2 + 3x - 18 - 2x^3 - 6x^2 - 4x - x^2 - 3x - 2}{(x^2+x-6)^2} = \frac{-2x^2 - 16x - 20}{(x^2+x-6)^2} = \frac{-2(x^2 + 8x + 10)}{(x^2+x-6)^2}.$$

Puisque pour tout $x \in]-\infty; -3[\cup]-3; 2[\cup]2; +\infty[$, $(x^2 + x - 6)^2 > 0$, la dérivée $f'(x)$ aura pour signe l'opposé de celui de $x^2 + 8x + 10$. Si on note $P(x) = x^2 + 8x + 10$, le calcul de son discriminant $\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 10 = 24$ nous donne

l'existence de deux racines réelles distinctes $x_1 = \frac{-8 - \sqrt{24}}{2} = \frac{-8 - 2\sqrt{6}}{2} = -4 - \sqrt{6}$ et $x_2 = \frac{-8 + \sqrt{24}}{2} = \frac{-8 + 2\sqrt{6}}{2} = -4 + \sqrt{6}$.

On obtient ainsi le signe de $P(x)$, donc celui de $f'(x)$:

Le sens de variation de f est donc :

Pour $x \in]-\infty; -4 - \sqrt{6}[\cup]-4 + \sqrt{6}; 2[\cup]2; +\infty[$ $f'(x) < 0$ et pour $x \in]-4 - \sqrt{6}; -3[\cup]-3; -4 + \sqrt{6}[$ $f'(x) > 0$.

Ainsi, on conclut que f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty; -4 - \sqrt{6}[$, $]-4 + \sqrt{6}; 2[$ et $]2; +\infty[$ et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-4 - \sqrt{6}; -3[$ et $]-3; -4 + \sqrt{6}[$

x	$-\infty$	$-4-\sqrt{6}$	$-4+\sqrt{6}$	$+\infty$	
$P(x)=x^2+8x+10$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$