ETUDE D'UNE FONCTION RATIONNELLE

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2-7x+10}{2(1-x)}$ et on note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f

2) Démontrer que le point $\Omega\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$ est centre de symétrie de la courbe

3) Calculer $f'(x)$

4) En déduire les variations de f et préciser les asymptotes horizontales et/ou verticales, les tangentes horizontales et les extremums. Dresser le tableau de variations de f

CORRECTION

1) La division par 1-x implique $1-x\neq 0$ donc $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

2) On calcule, pour

on calcule f(2x1-x)+f(x) on trouve que cette quantité est egala à

5=2x(5/2) donc on deduit le resultat demandé

Ceci prouve que le point $\Omega\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$ est centre de symétrie de la courbe

3) f est dérivable sur chacun des intervalles de D_f, en tant que quotient de fonctions qui le sont, et puisque f est de la forme $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, où $u(x)=x^2-7x+10\Rightarrow u'(x)=2x-7$ et $v(x)=2(1-x)\Rightarrow v'(x)=-2$, on en déduit que pour tout $x\in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}=\dfrac{(2x-7)\times 2(1-x)-(x^2-7x+10)\times(-2)}{(2(1-x))^2}$

$=\dfrac{4x-4x^2-14+14x+2x^2-14x+20}{4(1-x)^2}=\dfrac{-2x^2+4x+6}{4(1-x)^2}=\dfrac{2(-x^2+2x+3)}{4(1-x)^2}=\dfrac{-x^2+2x+3}{2(1-x)^2}$

4) Puisque pour tout $x\in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$, $2(1-x)^2>0$, $f'(x)$ sera du même signe que $P(x)=-x^2+2x+3$. Le calcul du discriminant de P donne $\Delta=(2)^2-4\times(-1)\times 3=16>0$ donc P admet deux racines réelles distinctes $\alpha=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{-2}=3$ et $\beta=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{-2}=-1$, d'où $P(x)=-(x-\alpha)(x-\beta)=-(x+1)(x-3)$, d'où le tableau de signes de $P(x)$ donc de $f'(x)$:

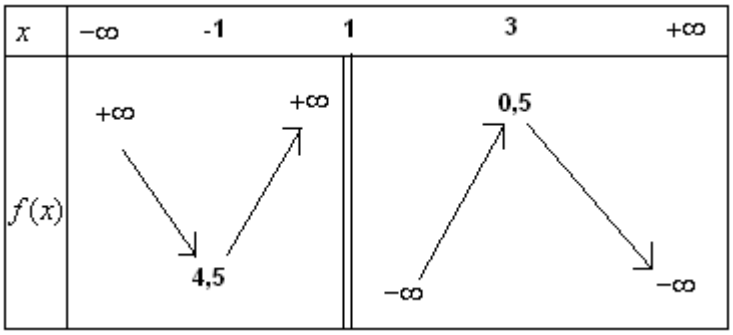
x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$P(x)$	−	0	+	‖	+	0	−

On en déduit que f est strictement décroissante sur $x\in]-\infty;-1]$ et sur $[3;+\infty[$, et strictement croissante sur $[-1;1[$ et sur $]1;3]$. Elle atteint donc deux extremums locaux en $x=-1$ et $x=3$, qui valent respectivement $f(-1)=4,5$ et $f(3)=0,5$

Aux points d'abscisses –1 et 3, C admet une tangente horizontale.

La limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationnelle étant celle du quotient simplifié de ses numérateur et dénominateur, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{x}{2}=-\infty$ et de même $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{x}{2}=+\infty$

De plus, $\lim\limits_{x\to 1} x^2-7x+10=4$. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 2(1-x)=0^-$ (car $x>1 \Leftrightarrow 1-x<0$), on en déduit, par quotient, que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=-\infty$. De même, puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} 2(1-x)=0$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=+\infty$. La droite d'équation $x=1$

est asymptote à la courbe (C)

Résumons cela dans le tableau de variations :