ETUDE DE FONCTIONS POLYNOME ET RATIONNELLE

Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1) Dresser le tableau de variations de P (incluant l'étude des limites)

2) Démontrer que l'équation $P(x)=0$ admet une unique solution α, dont vous donnerez l'encadrement à 1 unité près.

3) Soit f la fonction définie $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$

a) Pour tout $x \neq -1$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $P(x)$

b) En déduire les variations de f.

CORRECTION

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$.

De plus, P est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.

Les racines de P' sont donc 0 et 1, et la règle des signe d'un trinome du second degré nous permet d'écrire que :

Pour tout $x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$, $P'(x) > 0$ et pour tout $x\in]0;1[$, $P'(x)<0$. On en conclut que $\boxed{P \text{ est strictement croissante sur }]-\infty;0]\text{, strictement décroissante sur } [0\,;1] \text{ et strictement croissante sur } [1;+\infty[}$

Puisque $P(0) = -1$ et $P(1) = -2$, le tableau de variations de P est donc :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$P(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

2) Sur $]-\infty;1]$, le maximum de la fonction P est atteint lorsque x=0 et vaut -1. Ainsi, pour tout $x\in]-\infty;1]$, $P(x) \leq -1$ (en particulier $\neq 0$)

P est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$. De plus $0 \in \left[P(1); \lim\limits_{x\to+\infty} P(x)\right[$. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires affirme l'existence et l'unicité d'une solution $\alpha \in [1;+\infty[$ à l'équation $P(x)=0$

Puisque $P(2) = 3 > 0$, on aura $P(1) < 0 < P(2) \Leftrightarrow P(1) < P(\alpha) < P(2) \Leftrightarrow \boxed{1<\alpha<2}$

3) Soit f la fonction définie $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$

a) Pour tout $x\neq -1$, on a $f'(x) = \dfrac{-1\times(1+x^3)-(1-x)\times 3x^2}{(1+x^3)^2} = \dfrac{-1-x^3-3x^2+3x^3}{(1+x^3)^2} = \dfrac{P(x)}{(1+x^3)^2}$

b) Puisque pour tout $x\neq -1$, $(1+x^3)^2 > 0$, $f'(x)$ est du même signe que $P(x)$.

Ainsi : Pour tout $x\in]-\infty;-1[\cup]-1;\alpha[$, $f'(x)<0$, $f'(\alpha)=0$ et pour tout $x\in]\alpha;+\infty[$, $f'(x)>0$. On conclut que :

$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty;-1[\text{, sur }]-1;\alpha] \text{ et strictement croissante sur } [\alpha;+\infty[}$