Soit I un intervalle. Le but de ce problème est la recherche des fonctions f, définies et dérivables sur I, qui vérifient l'équation fonctionnelle (E) suivante :

$$(E) : \text{pour tous } a \text{ et } b \text{ de } I,\ f(ab) = f(a) + f(b)$$

Autrement dit, on recherche *toutes* les fonctions qui transforment les produits en sommes sur un intervalle donné.

1. La fonction nulle, $f = 0$ sur I, est-elle solution de (E) ?
2. Démontrer que si f est solution de (E), alors pour tout réel λ, la fonction λf est aussi solution de (E).
3. Dans cette question, on suppose que $0 \in I$. Soit f une solution de (E).

   Démontrer qu'alors, pour tout $b \in I$: $f(b) = 0$

On constate que si I contient 0, alors seule la fonction nulle est solution de (E). (Ce qui n'est pas très intéressant)

Pour les questions 4 et 5, on suppose que **$I =]0, +\infty[$ et que f est une solution de (E) sur I.**

4. A l'aide de valeurs de a et b bien choisies, démontrer que :

$$f(1) = 0$$

5. Soit $a \in I$. On considère la fonction g_a définie sur I par :

$$g_a(x) = f(ax) - f(x)$$

   a. Démontrer que g_a est une fonction constante sur I. (On précisera la valeur de cette constante)

   b. En déduire que pour tout $x \in I$:

$$af'(ax) - f'(x) = 0$$

   c. En déduire qu'il existe un réel k tel que :

$$f'(a) = \frac{k}{a}$$

On a donc démontré qu'une fonction dérivable f qui transforme les produits en sommes sur $I =]0, +\infty[$ vérifie :

$$(S)\begin{cases} f(1) = 0 \\ \text{il existe un réel } k \text{ tel que : } f'(x) = \dfrac{k}{x} \text{ pour tout } x \in I \end{cases}$$

Nous allons maintenant étudier la réciproque.

6. Soit f une fonction définie et dérivable sur $I =]0, +\infty[$ vérifiant (S). Démontrer que f vérifie (E).

   (On pourra utiliser la fonction g_a définie à la question 5)

1. Si f est la fonction nulle sur I, alors pour tous a et b de I, on a :

   $$f(ab) = 0 \text{ et } f(a) + f(b) = 0$$

   Donc : $$f(ab) = f(a) + f(b)$$

   La fonction nulle sur I est bien solution de (E).

2. Comme f est solution de (E), on a, pour tous a et b de I :

   $$f(ab) = f(a) + f(b)$$

   En multipliant par λ : $$\lambda f(ab) = \lambda f(a) + \lambda f(b)$$

   Donc λf est aussi solution de (E).

3. En remplaçant a par 0, l'équation fonctionnelle s'écrit :

   $$\text{pour tout } b \in I,\ f(0) = f(0) + f(b)$$

   D'où, pour tout $b \in I$: $$f(b) = 0$$

   Autrement dit, la fonction f est nulle sur I.

Pour les questions 4 et 5, on suppose que **$I =]0, +\infty[$ et que f est une solution de (E) sur I.**

4. En prenant $a = b = 1$, l'équation fonctionnelle devient :

   $$f(1) = f(1) + f(1)$$

   D'où : $$f(1) = 0$$

5. a. Puisque f est solution de (E), on a :

   $$f(ax) = f(a) + f(x)$$

   D'où, pour tout $x \in I$: $$g_a(x) = f(a)$$

   La fonction g_a est donc contante, sur I, égale à $f(a)$.

   b. Déjà, la fonction g_a est dérivable sur I (car construite à partir des fonctions $x \mapsto ax$ et f qui le sont).

   D'une part, g_a étant constante sur I, on a pour tout $x \in I$:

   $$g_a'(x) = 0$$

   D'autre part, le théorème de dérivation d'une fonction composée donne, pour tout $x \in I$:

   $$g_a'(x) = af'(ax) - f'(x)$$

   D'où l'égalité recherchée.

   c. En particularisant $x = 1$ dans l'égalité précédente, on obtient :

   $$af'(a) = f'(1)$$

   Et comme a n'est pas nul (puisque élément de I) :

   $$f'(a) = \frac{f'(1)}{a}$$

   Il existe donc bien un réel k (à savoir $k = f'(1)$) tel que :

   $$f'(a) = \frac{k}{a}$$

Ceci montre qu'une fonction dérivable sur]0, +∞[qui transforme les produits en sommes vaut 0 en 1 et a une dérivée proportionnelle à la fonction inverse.

Dans le question 6, nous allons montrer que, réciproquement, toute fonction dérivable sur $]0, +\infty[$, valant 0 en 1 et ayant une dérivée proportionnelle à la fonction inverse transforme les produits en sommes.

6. Soit f une fonction dérivable sur $I =]0, +\infty[$ qui vérifie :

$$(S)\ \begin{cases} f(1) = 0 \\ \text{il existe un réel } k \text{ tel que : } f'(x) = \dfrac{k}{x} \text{ pour tout } x \in I \end{cases}$$

Considérons la fonction g_a définie sur I par :

$$g_a(x) = f(ax) - f(x)$$

On a déjà vu que cette fonction est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$g_a'(x) = af'(ax) - f'(x)$$

Et comme f vérifie (S), cela donne :

$$g_a'(x) = a \times \frac{k}{ax} - \frac{k}{x} = 0$$

La fonction g_a est donc constante. Or, nous savons que $f(1) = 0$, donc :

$$g_a(1) = f(a)$$

La fonction g_a est donc constante, égale à $f(a)$ sur I :

$$g_a(x) = f(a)$$

C'est-à-dire :

$$f(ax) - f(x) = f(a)$$

$$f(ax) = f(a) + f(x)$$

Ceci étant valable pour tous a et x de I.

Autrement dit, la fonction f transforme les produits en sommes, elle est bien solution de (E).

Information : lorsque $k = 1$, on récupère la fonction logarithme népérien.