Lycée El Ahd El Jadid Jendouba **Mai 2010**	**Devoir de synthèse n°3** **Mathématiques**	**Niveau : 4ème Sc.tech 1 et 2** **Prof : Khemissi. A** **Durée : 3 heures**

Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0.75 point, une réponse fausse ou l'absence de la réponse vaut 0 point.

I) Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{3}$

1) La probabilité de l'événement : « X > 2 » est égale

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ c) $C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$

2) L'espérance mathématique de X est égale à

a) 1 b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$

3) Si F est la fonction de répartition de X alors F(1) est égal à

a) $\frac{7}{27}$ b) $\frac{20}{27}$ c) $\frac{6}{27}$

II) La limite de $x \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à

a) 0 b) 1 c) 2

Exercice 2 : (4 points)

Dans une population donnée, 15% des individus ont une maladie M_a. Parmi les individus atteints de la maladie M_a, 20% ont une maladie M_b et parmi les individus non atteints de la maladie M_a, 4% ont une maladie M_b.

I) On prend un individu au hasard et on désigne par A et B les événements suivants :

A : « l'individu est atteint de la maladie M_a ».

B : « l'individu est atteint de la maladie M_b ».

a) Donner les valeurs de p(A) , p(B) et p(B/ A)

b) Calculer p(B $\cap$A) et p(B $\cap$ A). Déduire p(B).

c) Calculer la probabilité pour qu'un individu atteint de la maladie M_b soit aussi atteint de la maladie M_a.

II) On prend n individus au hasard dans cette population et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de ceux ayant la maladie M_a et la maladie M_b

1) On suppose dans cette question que n=10

a) Déterminer la probabilité de chacun des événements :

A: « deux individus au plus sont atteints de la maladie M_a et de la maladie M_b».

B: « Au moins un individus soit atteint de la maladie M_a et de la maladie M_b».

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

2) Calculer le nombre minimal n d'individus qu'il faut prendre pour que la probabilité d'avoir au moins un individu atteint de la maladie M_a et de la maladie M_b soit supérieure à 0,8

Exercice 3 : (3 points)

La durée de vie d'une ampoule électrique mesurée en heures, est une variable aléatoire réelle X continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ $(\lambda > 0)$

1) Déterminer la densité de X
2) Déterminer la fonction de répartition de X
3) Déterminer λ sachant que la durée moyenne d'une ampoule est de 1000 heures
4) Calculer la probabilité pour qu'une ampoule dure moins de 1000 heures
5) Sachant qu'une ampoule a durée 1000 heures, calculer la probabilité pour qu'elle dure 300 heures de plus.

Exercice 4 : (4 points)

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = (1-x)^2 e^x$ et on désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Prouver $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b) Etudier les variations de f.

c) Tracer (C)

2) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$

a) Calculer u_1

b) En utilisant une intégration par partie, montrer que $\forall\ n \in IN^*$ on a : $u_{n+1} = (n+1)\, u_n - 1$

c) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ζ et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

3) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $u_n \geq 0$.

b) Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $n \in IN^*$ on a $(1 - t)^n e^t \leq (1 - t)^n e$

En déduire que pour tout $n \in IN^*$: $u_n \leq \dfrac{e}{n+1}$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 5 : (6 points)

I) Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x + 1 - 2\ln x$.

1) Dresser le tableau de variations de g.

2) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a $g(x) > 0$.

II) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x - (\ln x)^2$.

On désigne par ζ_f désigne sa courbe relativement à un repère orthonormé du plan.

1) a) Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x} = 0$

c) Dresser le tableau de variations de f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur IR.

b) Etudier la position relative de ζ_f par rapport à la droite $\Delta : y = x$

c) Montrer que ζ_f admet une branche parabolique de direction asymptotique $\Delta : y = x$.

d) Tracer ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$ (courbe de f^{-1}) dans le même repère.

III) Soit A la mesure de l'aire de la région du plan délimitée par ζ_f , $\zeta_{f^{-1}}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

1) Montrer que $\int_1^e \ln^2 t \, dt = e - 2$

2) Calculer A.

3) En déduire la valeur de $\int_1^e f^{-1}(t)dt$.

4) On considère la suite (I_n) définie sur IN par $I_n = \quad x^n \ln x \, dx$

a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties I_n en fonction de n.

b) Déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$