Lycée El Ahd El Jadid Jendouba 22- 04 - 2010	**Devoir de contrôle n°3 Mathématiques**	**Niveau : 4ème Sc tech 1 Prof : Khemissi. A Durée : 2 heures**

Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0.75 point, une réponse fausse ou l'absence de la réponse vaut 0 point.

1) Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in IN$ par $u_n = 2n + 3$. La suite (v_n) définie par $v_n = e^{u_n}$

a) est arithmétique b) est géométrique c) n'est ni arithmétique ni géométrique

2) Si (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q = \frac{2}{3}$ alors sa limite est

égale à : a) $+\infty$ b) 0 c) $\frac{2}{3}$

3) Si A et B deux événements indépendants tels que p (A) = 0,2 et p (B)= 0,3 alors $p(A \cup B) =$

a) 0,06 b) 0,44 c) 0,5

4) Soit A et B deux événements tels que : $p(A\backslash B) = \frac{1}{4}$, $p(A\backslash B) = \frac{1}{3}$ et $p(B) = \frac{1}{2}$ alors

a) $p(A) = \frac{7}{12}$ b) $p(A) = \frac{7}{24}$ c) $p(A) = \frac{1}{2}$

Exercice 2 : (5 points)

Une urne contient trois jetons rouges, deux jetons bleus et quatre jetons verts.

1) On tire au hasard et simultanément trois jetons de l'urne.
   Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « Les trois jetons tirés sont de même couleur »
   B : « Les jetons tirés sont de couleurs différentes »
   C : « Parmi les jetons tirés, deux et deux seulement sont de même couleur »
2) On répète le tirage précédent n fois de suite ($n \geq 2$), en remettant chaque fois les jetons tirés dans l'urne. On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fois où les jetons tirés sont de couleurs différentes.
   a) Calculer la probabilité de l'événement « X = 2 »
   b) Montrer qu'il faux au moins quatre tirages successifs pour que l'espérance mathématique de X soit supérieure ou égale à 1

Exercice 3 :(5 points)

Soit α un nombre réel appartenant à] 0, 1[. On considère la suite (u_n) définie

sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{(1+\alpha)\,u_n - \alpha}{u_n} \end{cases}$

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel n on a : $u_n \geq 1$

b) Montrer que (u_n) est décroissante.

c) En déduire la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite (v_n) définie sur IN par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - \alpha}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison α

b) Exprimer v_n en fonction de n et α . En déduire l'expression de u_n en fonction de n et α

c) Retrouver alors la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$

Exercice 4 :(6 points)

I) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par g(x) = 1 + x – x lnx

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) a) En déduire que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α dans $]0, +\infty[$

b) Vérifier que $3 < \alpha < 4$

II) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : f(x) = $2 + \dfrac{\ln x}{x+1}$ et on désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan

1) a) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

b) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x\,(1+x)^2}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f

2) Soit D la droite d'équation y = 2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de D et ζ et la position relative de ζ et D

3) Soit h la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par h(x) = f(x) – x

a) Montrer que h est strictement décroissante sur $]\alpha, +\infty[$

b) Etablir que pour tout $x \in [1, \alpha]$ on a $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{g(1)}{4}$

c) En déduire les variations de h sur $[1, \alpha]$

4) a) Prouver que l'équation f(x) = x admet une unique solution β sur $[1, +\infty[$

b) Vérifier que $2 < \beta < 3$