# DEVOIR N°4

## EXERCICE1

1) pour tout nombre complexe z ,on pose :$P(z) = z^4 - 1$
a)factoriser $P$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ de l'équation:$P(z) = 0$.
b)en déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation: $(\frac{2z+1}{z-1})^4 = 1$
2)a)le plan est muni d'un repère orthonormal direct d'origine O
placer les points A,B,C d'affixes respectives:$a = -2; b = \frac{-1-3i}{5}; c = \frac{-1+3i}{5}$
b)démontrer que les points O,A,B et C sont situés sur un même cercle que l'on déterminera
3) placer le point D d'affixe :$d = -\frac{1}{2}$.
écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $z' = \frac{a-c}{d-c}$
en déduire le rapport:$\frac{CA}{CD}$

## EXERCICE2

Soit $f$ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :
$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}, \forall x > 0$ et $f(0) = 0$
on note $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité : 5 cm)
partie 1 :
1)démontrer que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $(C)$
2)pour $x > 0$ , calculer $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ . étudier la limite de cette expression quand $x$ tend vers 0. Que peut-on déduire pour $f$? Pour $(C)$?
3)démontrer que pour $x > 0$ ,on a : $f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$
4)dresser le tableau de variations de $f$.
partie 2 :
on note $g$ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = f(x) - xf'(x)$.
1)montrer que, dans $]0; +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ sont équivalentes.
2)montrer que :$x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ admet une seule racine réelle,notée $\alpha$, dont on donnera un encadrement à $10^{-2}$ près.
3)On pose $A = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$. Donner un encadrement de $A$ à $10^{-1}$ près (justifier) et montrer que $A = f'(\alpha)$
4) pour tout $a > 0$ , on note $(T_a)$ la tangente à $(C)$ au point d'abscisse $a$.
montrer que $(T_\alpha)$ a pour équation $y = Ax$. Tracer $(T_\alpha)$ et $(C)$
5)déduire des questions précédentes que, de toutes les tangentes $(T_a)$ , seule $(T_\alpha)$ passe par l'origine du repère.
6)on admettra que $(T_\alpha)$ est au-dessus de $(C)$ sur $]0; +\infty[$
a)résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$ (discuter selon les valeurs de $m$)
b)résoudre graphiquement l'équation $f(x) = mx$(discuter selon les valeurs de $m$)