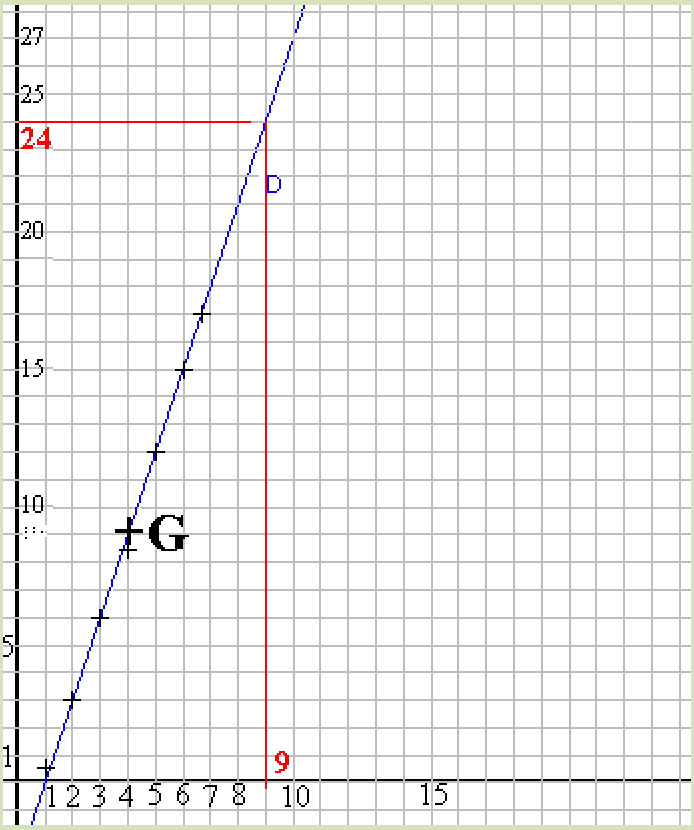
Correction suite

EXERCICE1

Partie A

1.



Guesmi.B

2. $x_G = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)/7 = 28/7 = 4$

$y_G = (0,5 + 3 + 6 + 8,4 + 12,1 + 15 + 18) / 7 = 63/7 = 9$

G(4 ; 9)

3. L'équation est de la forme y = 3*x* + p puisque son coefficient directeur est 3.

a) Le point de coordonnées (4 ; 9) appartient à la droite D donc ses coordonnées vérifient l'équation de D .

9 = 3 $\times$4 + p d'ou p = 9 - 12 = -3.

L'équation de D est donc y = 3*x* - 3

b) voir figure

4. a) 2007 correspond au rang 9 , pour x = 9 on trouve y = 3 $\times$ 9 - 3 = 27 - 3 = 24, il y aura environ 24 millions d'abonné en 2007.

b) $3x - 3 \geq 32$ équivaut à $3x \geq 35$ équivaut à $x \geq 35/3$ soit environ 11,6

1998 + 12 = 2010

A partir de 2010, le nombre d'abonnés dépassera 32 millions.

Partie B

1. a) $u_2 = u_1 \times q = 9000 \times 1{,}8 = 16\ 200$

donc en 2000, le nombre d'abonnés est $u_2 = 16\ 200$.

b) $u_3 = u_1 \times q^2 = 9000 \times 1{,}8^{\ 2} = 29160$

$u_4 = u_3 \times q = 52488$.

c) $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 9000 \times (1{,}8)^{n-1}$ en fonction de n.

2. La suite u_n est croissante puisque sa raison q est plus grande que 1 et que son premier terme $u_1$est positif, donc il suffit de trouver le premier entier naturel n tel que $u_n > 32\ 000\ 000$

$u_{14} \simeq 18\ 740\ 668$ et $u_{15} \simeq 33\ 733\ 203$

soit n = 15 ; 1998 + 15 = 2013.

A partir de 2013 le nombre d'abonnés dépassera 32 millions.

3. C'est dans le milieu urbain que les 32 millions d'abonnés seront dépassés en premier. (en 2010 contre 2013 en milieu rural)

EXERCICE2

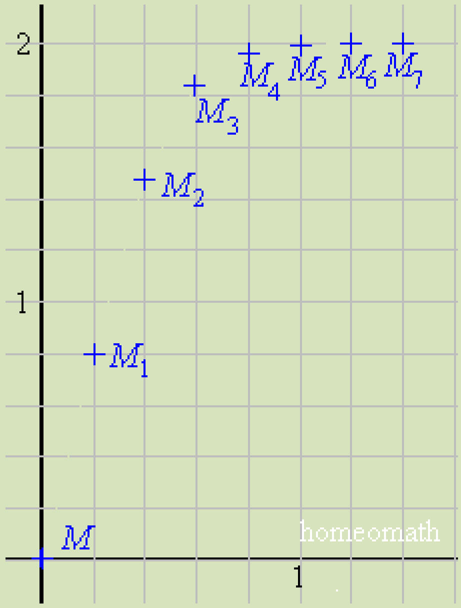
Partie A. Étude d'une suite

1. a)

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4
y_n	0	0,8000	1,4720	1,8386	1,9625	1,9922	1,9984	1,9997

b)

Gesmi.B



c) On peut conjecturer que la suite (y_n) est croissante et convergente vers 2.

2. a) Pour tout réel x, on a : p' (x) = - 0,4 x + 1 .

sur [0; 2], $x \in [0; 2]$ soit $0 \leq x \leq 2$ donc $0 \geq -0{,}4x \geq -0{,}8$ donc $1 \geq -0{,}4x + 1 \geq 0{,}2$

donc sur [0; 2] , p' (x) = - 0,4 x + 1 > 0 , la fonction f est donc strictement croissante sur [0; 2]

Pour tout réel x de [0 ; 2], c'est à dire tel que $0 \leq x \leq 2$

comme p strictement croissante on a :

$p(0) \leq p(x) \leq p(2)$ donc $0{,}8 \leq p(x) \leq 2$ par conséquent $p(x) \in [0; 2]$.

b) Démontrons la propriété par récurrence :

$y_0 = 0$ donc $0 \leq y_0 \leq 2$ la propriété est vrai au rang 0.

supposons que pour un certain rang n on ait : $0 \leq y_n \leq 2$ d'après la propriété précédente **2.a)** on a :

$0 \leq p(y_n) \leq 2$ soit encore $0 \leq y_{n+1} \leq 2$ donc la propriété reste encore vrai au rang n + 1.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $0 \leq y_n \leq 2$.

c)Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n on a $y_{n+1} \geq y_n$

$y_1 \geq y_0$ donc la propriété est vrai au rang 0.

supposons que pour un certain rang n on ait : $y_{n+1} \geq y_n$ comme la fonction p est strictement croissante on a : $p(y_{n+1}) \geq p(y_n)$ soit encore $y_{n+2} \geq y_{n+1}$ donc la propriété reste vrai au rang n+ 1.

On a donc pour tout entier naturel n on a $y_{n+1} \geq y_n$ donc la suite y_n est croissante .

d) La suite (y_n) est croissante et majorée par 2 donc elle est convergente.

Partie B. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur [0, + ∞ [par

$$g(x) = 2\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$$

et (C_g) sa courbe représentative.

1. Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2)

g est dérivable sur [0, + ∞ [comme quotient de deux fonctions dérivables sur [0, + ∞ [(e^{4x+1} ne peut s'annuler sur [0, + ∞ [ ) et pour tout réel x de [0, + ∞ [on a :

$$g'(x) = 2\frac{4e^{4x}(e^{4x}+1)-4e^{4x}(e^{4x}-1)}{(e^{4x}+1)^2} = 2\frac{4e^{8x}+4e^{4x}-4e^{8x}+4e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{16e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}$$

$$4-(g(x))^2 = 4-\left(2\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right)^2 = 4-4\frac{e^{8x}-2e^{4x}+1}{(e^{4x}+1)^2} =$$

$$\frac{4(e^{8x}+2e^{4x}+1)-4(e^{8x}-2e^{4x}+1)}{(e^{4x}+1)^2} = \frac{16e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2} = g'(x)$$

g satisfait à la condition (1)

$$g(0) = 2\frac{e^0-1}{e^0+1} = 2\frac{0}{2} = 0$$

g satisfait à la condition (2).

2. a)

$$g(x) = 2\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1} = 2\frac{X-1}{X+1} \text{ en posant } X = e^{4x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{X\to+\infty} 2\frac{X-1}{X+1} = 2$$

(C_g) admet la droite Δ d'équation y = 2 comme asymptote en + ∞

b)

D'après **B.1** , g'(x) > 0 sur [0, + ∞ [donc la fonction g est strictement croissante sur [0, + ∞ [

3. Déterminons l'équation de la tangente à (Cg) à l'origine :

$$g'(0) = \frac{16e^0}{(e^0+1)^2} = \frac{16}{4} = 4 \quad ; \quad g(0) = 0$$

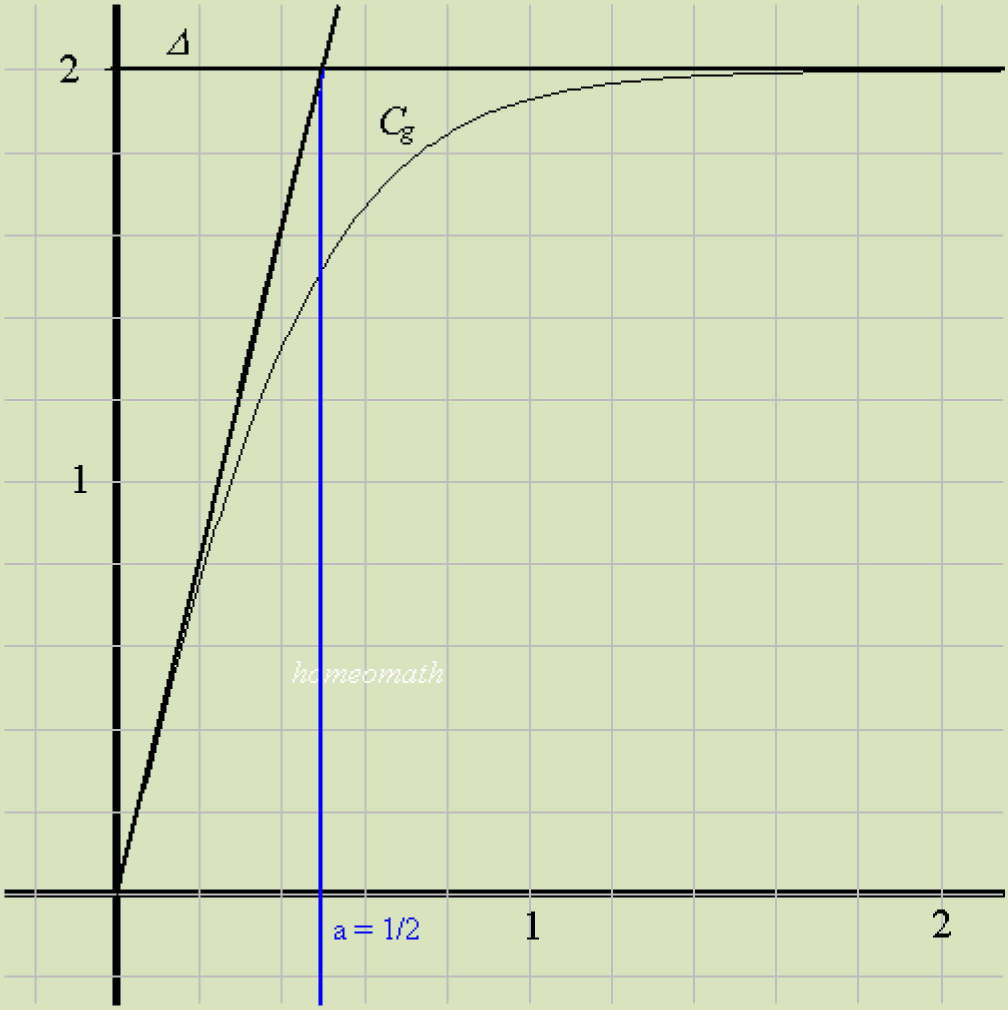
L'équation de la tangente à (Cg) à l'origine a donc pour équation $y = g'(0)x + g(0)$ soit $y = 4x$.

L'abscisse a du point d'intersection de Δ et de la tangente à (Cg) à l'origine est solution de l'équation

$4x = 2$ soit $x = 1/2$.

$a = 1/2$

4.



EXERCICE3

Partie A : étude d'une fonction

1.a) f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ comme produit de deux fonction dérivables sur $[0\,;+\infty[$ et pour pour tout réel x de $[0\,;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = 1\ln(x+1) + x \times \frac{1}{x+1} = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$$

sur]0 ;+ ∞[, $x > 0$ donc $x + 1 > 1$ d'où $\ln(x + 1) > \ln 1$ il en résulte

$\ln(x + 1) > 0$
sur]0 ;+ ∞[, $x > 0$ donc $x + 1 > 1$ d'où

$$\frac{x}{x+1} > 0$$

donc sur]0 ;+ ∞[; $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur [0 ;+ ∞[

b) Déterminons l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 :
Coefficient directeur de la tangente : $f'(0) = \ln 1 + 0 = 0$
Ordonnée du point d'abscisse de (C) : $f(0) = 0$
L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0)x + f(0)$ soit $y = 0$
L'axe des abscisses est donc bien tangent à la courbe (C) au point O(0 ; 0).

2. On pose

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$$

a)

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)}{x+1} + \frac{c}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{x+1}$$

par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \quad \text{donc } \boxed{\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}}$$

b)

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 x - 1 + \frac{1}{x+1}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1$$

$$I = \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 - \ln 1 = \boxed{\frac{-1}{2} + \ln 2}$$

3. Si $x \geq 0$; $f(x) \geq 0$ puisque la fonction f est croissante sur [0 ;+ ∞[donc la courbe (C) est au dessus de l'axe des abscisse sur [0 ; 1] par conséquent l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$ est donné en unités d'aires, par :

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\ln(x+1)dx \quad \text{posons } u'(x) = x \text{ et } v(x) = \ln(x+1)$$

$$\text{on a donc : } u(x) = \frac{x^2}{2} \text{ et } v'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{x^2}{x+1}dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{2}I$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\ln 2 - 0 - \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2} + \ln 2\right) = \frac{1}{4}$$

4. La fonction *f* est strictement croissante et continue sur [0;l] de plus *f*(0) = 0 <0,25

et *f*(1) = ln 2 > 0,25 donc l'équation *f* (*x*) = 0,25 admet une seule solution sur l'intervalle [0;l].

Sur la calculatrice on lit *f*(0,56) < 0,25 < *f*(0,57) donc 0,56 < α < 0,57

Partie B : étude d'une suite

1. Pour tout entier naturel n on a

:

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)dx - \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx$$

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n)\ln(x+1)dx = \int_0^1 x^n(x-1)\ln(x+1)dx$$

$$x \in [0;1] \Rightarrow \begin{cases} x^n \geq 0 \\ x-1 \leq 0 \\ \ln(x+1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^n(x-1)\ln(x+1) \leq 0 \Rightarrow \int_0^1 x^n(x-1)\ln(x+1)dx \leq 0$$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante **(1)**

$$x \in [0;1] \Rightarrow x^n \ln(x+1) \geq 0 \Rightarrow u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx \geq 0$$

la suite (u_n) est donc minorée par 0 **(2)**

De (1) et (2) , on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

2. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel *x* de l'intervalle [0 ; 1] on a

$$0 \leq \ln(x+1) \leq \ln 2 \text{ soit } 0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln 2$$

en intégrant cette double inégalité sur [0 ; 1] on obtient pour tout entier naturel non nul :

$$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx \leq \int_0^1 x^n \ln 2dx \text{ d'où } 0 \leq u_n \leq \ln 2\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{n+1}$$

Pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \dfrac{\ln 2}{n+1}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln 2}{n+1} = 0 \end{array}\right\} (\text{Théorème des gendarmes}) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

EXERCICE4

1)

$$d_1 = 50$$

$$d_2 = 50 - \frac{1}{100}\times 50 = 50 - 0,5 = 49,5$$

$$d_3 = 49,5 - \frac{1}{100}\times 49,5 = 49,5 - 0,495 = 49,005$$

2) Chaque distance est obtenue en diminuant la précédente de 1 % donc en multipliant la précédente par 0,99 , donc pour tout entier naturel n non nul :

$$d_{n+1} = d_n - \frac{1}{100}d_n = d_n - 0,01d_n = (1-0,01)d_n = 0,99d_n$$

donc (d_n) est une suite géométrique de raison 0,99.

$$d_n = d_1 \times (0,99)^{n-1} = \boxed{50\times(0,99)^{n-1}}$$

3) a)

$$L_n = d_1 + d_2 + \ldots + d_n = d_1\frac{1-(0,99)^n}{1-0,99} = 50\times\frac{1-(0,99)^n}{0,01}$$

$$L_n = 5000\left(1-(0,99)^n\right)$$

b)

$$0,99 \in]-1;1[\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(0,99)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} L_n = 5000$$

le globe trotter ne peut pas gagner , il n'atteindra jamais 5000 km.

4)

$$L_n = 5000\left(1-(0,99)^n\right) \geq 4999 \Leftrightarrow$$

$$1-(0,99)^n \geq \frac{4999}{5000} = 0,9998 \Leftrightarrow -(0,99)^n \geq 0,9998\text{-}1 \Leftrightarrow$$

$$(0,99)^n \leq 0,0002 \Leftrightarrow n\ln 0,99 \leq \ln 0,0002 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,0002}{\ln 0,99}$$

$$\frac{\ln 0,0002}{\ln 0,99} \approx 847,5$$

donc il luit faudra au minimum 848 jours pour parcourir cette distance

EXERCICE5

Correction :

1) $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$ pour tout entier naturel n donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2) a) soit la propriété P_n : $u_n > n^2$ où n est un entier naturel n.

Démontrons par récurrence que la propriété P_n : $u_n > n^2$ est vrai pour tout entier naturel n.

$u_0 = 1 > 0^2$ donc la propriété P_0 est vraie.

supposons vraie la propriété P_n, c'est à dire supposons que

$u_n > n^2$ on a donc

$u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3$

$u_{n+1} > n^2 + 2n + 3 = (n^2 + 2n + 1) + 2 = (n + 1)^2 + 2 > (n + 1)^2$

donc la propriété P_{n+1} reste encore vrai.

Par conséquent pour tout entier naturel n on a : $u_n > n^2$

2) b)

$u_n > n^2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3) Calculons les premiers termes de la suite (u_n) :

$u_0 = 1$

$u_1 = u_0 + 2\times 0 + 3 = 1 + 3 = 4$

$u_2 = u1 + 2\times 1 + 3 = 4 + 2 + 3 = 9$

$u_3 = u2 + 2\times 2 + 3 = 9 + 4 + 3 = 16$

on peut donc conjecturer que $u_n = (n + 1)^2$ pour tout entier naturel n.

démontrons cette propriété par récurrence :

$u_0 = 1 = (0 + 1)^2$ donc la propriété est vraie au rang 0.

supposons vraie la propriété vrai au rang n, c'est à dire supposons que

$u_n = (n+1)^2$ on a donc

$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3$

$= (n+1)^2 + 2n + 2 + 1 = (n+1)^2 + 2(n+1) + 1$

$= (n+1+1)^2 = (n+2)^2$

donc la propriété reste encore vrai au rang $n + 1$

Par conséquent pour tout entier naturel n on a : $u_n = (n+1)^2$

EXERCICE6

Correction

1.

a) $u_0 = 2(0) - 1 = -1$

$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 1 - (2n - 1) = 2n + 2 - 1 - 2n + 1 = 2$

Pour tout entier naturel n on a donc $u_{n+1} = u_n + 2$, de plus $u_0 = -1$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r = 2 et de premier terme $u_0 = -1$

b)

$$S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2} = \frac{(n+1)(-1+2n-1)}{2}$$

$$S_n = \frac{(n+1)(2n-2)}{2} = (n+1)(n-1)$$

2.

a)

$$v_0 = e^{u_0} = e^{-1}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^{u_{n+1}}}{e^{u_n}} = e^{u_{n+1}-u_n} = e^2$$

Pour tout entier naturel n on a donc

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = e^2$$

de plus $v_0 = e^{-1}$

donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = e^2$ et de premier terme $v_0 = e^{-1}$

b)

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n =$$

$$e^{u_0} \times e^{u_1} \times \ldots \times e^{u_n} =$$

$$e^{u_0+u_1+\ldots+u_n} = e^{S_n} = e^{(n+1)(n-1)}$$

EXERCICE7

Correction

1. $u_0 = f(0) = 4e^0 = 4$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{4e^{-\frac{1}{2}(n+1)}}{4e^{-\frac{1}{2}n}} = e^{-\frac{1}{2}(n+1-n)} = e^{\frac{-1}{2}}$$

Pour tout entier naturel n on a donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{\frac{-1}{2}}$, de plus $u_0 = 4$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = e^{-1/2}$ et de premier terme $u_0 = 4$

2. ses deux sommes ont chacune n + 1 termes

$u_1 = 4e^{-\frac{1}{2}}$

$$S_n = 4 \times u_0 \times \frac{1-\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^{n+1}}{1-e^{-\frac{1}{2}}} = 16 \times \frac{1-\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^{n+1}}{1-e^{-\frac{1}{2}}}$$

$$T_n = 4 \times u_1 \times \frac{1-\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^{n+1}}{1-e^{-\frac{1}{2}}} = 16e^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1-\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^{n+1}}{1-e^{-\frac{1}{2}}}$$

3. $\mathbf{0} < e^{-\frac{1}{2}} < e^0 = \mathbf{1}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^{n+1} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{16}{1-e^{-\frac{1}{2}}} \qquad \lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{16e^{-\frac{1}{2}}}{1-e^{-\frac{1}{2}}}$$