

Exercice n°1

Le quadruplet (D,A,C,H) détermine un repère orthonormé de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ ne sont pas coplanaires et sont même orthogonaux deux à deux

Le quadruplet (D,A,B,H) détermine un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DH}$ ne sont pas coplanaires.

En revanche ce repère n'est pas orthonormé car les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DB}$ ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (D,B,F,H) ne détermine pas un repère de l'espace car le vecteur $\overrightarrow{DF}$ s'exprime à l'aide de $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DH}$ (en effet $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{DB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DH}$))

Le quadruplet (D,C,H,E) détermine un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{DE}$ ne sont pas coplanaires.

En revanche ce repère n'est pas orthonormé car les vecteurs $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{DE}$ ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (A,B,C,G) détermine un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires.

En revanche ce repère n'est pas orthonormé car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (A,B,C,F) détermine un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}$ ne sont pas coplanaires.

En revanche ce repère n'est pas orthonormé car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (A,B,C,H) détermine un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ ne sont pas coplanaires.

En revanche ce repère n'est pas orthonormé car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (A,B,C,E) détermine un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.

En revanche ce repère n'est pas orthonormé car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux

Exercice n°2

1) Le point O étant l'origine du repère, on aura O(0 ; 0 ; 0)

Puisque $\overrightarrow{OA} = 1x \overrightarrow{OA} + 0x \overrightarrow{OC} + 0x \overrightarrow{OD}$, on aura A(1 ; 0 ; 0).

Puisque $\overrightarrow{OB} = 1x \overrightarrow{OA} + 1x \overrightarrow{OC} + 0x \overrightarrow{OD}$, on aura B(1 ; 1 ; 0)

Puisque $\overrightarrow{OC} = 0x \overrightarrow{OA} + 1x \overrightarrow{OC} + 0x \overrightarrow{OD}$, on aura C(0 ; 1 ; 0).

Puisque $\overrightarrow{OD} = 0x \overrightarrow{OA} + 0x \overrightarrow{OC} + 1x \overrightarrow{OD}$, on aura D(0 ; 0 ; 1)

Puisque $\overrightarrow{OE} = 1x \overrightarrow{OA} + 0x \overrightarrow{OC} + 1x \overrightarrow{OD}$, on aura E(1 ; 0 ; 1).

Puisque $\overrightarrow{OF} = 1x \overrightarrow{OA} + 1x \overrightarrow{OC} + 1x \overrightarrow{OD}$, on aura F(1 ; 1 ; 1)

Puisque $\overrightarrow{OG} = 0x \overrightarrow{OA} + 1x \overrightarrow{OC} + 1x \overrightarrow{OD}$, on aura G(0 ; 1 ; 1)

2) Le milieu de [AE] aura pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_E}{2} = 1; \frac{y_A + y_E}{2} = 0; \frac{z_A + z_E}{2} = \frac{1}{2} \right)$

3) Le centre I du carré DEFG est le milieu de chacune de ses diagonales, donc a pour coordonnées $\left(\frac{x_D + x_F}{2} = \frac{1}{2}, \frac{y_D + y_F}{2} = \frac{1}{2}, \frac{z_D + z_F}{2} = 1 \right)$

4) Le point de coordonnées $(0; 0; \frac{1}{2})$ est le milieu de [OD].

Le point de coordonnées $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$ est le milieu de [OB].

Le point de coordonnées $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ est le milieu de [OF].

Exercice n°3

1) Dans le repère $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$:

Le point D étant l'origine du repère, on aura D(0 ; 0 ; 0)

Puisque $\overrightarrow{DA} = 1x \overrightarrow{DA} + 0x \overrightarrow{DC} + 0x \overrightarrow{DH}$, on aura A(1 ; 0 ; 0).

Puisque $\overrightarrow{DB} = 1x \overrightarrow{DA} + 1x \overrightarrow{DC} + 0x \overrightarrow{DH}$, on aura B(1 ; 1 ; 0)

Puisque $\overrightarrow{DC} = 0x \overrightarrow{DA} + 1x \overrightarrow{DC} + 0x \overrightarrow{DH}$, on aura C(0 ; 1 ; 0).

Puisque $\overrightarrow{DE} = 1x \overrightarrow{DA} + 0x \overrightarrow{DC} + 1x \overrightarrow{DH}$, on aura E(1 ; 0 ; 1)

Puisque $\overrightarrow{DF} = 1x \overrightarrow{DA} + 1x \overrightarrow{DC} + 0x \overrightarrow{DH}$, on aura F(1 ; 1 ; 1).

Puisque $\overrightarrow{DG} = 0x \overrightarrow{DA} + 1x \overrightarrow{DC} + 1x \overrightarrow{DH}$, on aura G(0 ; 1 ; 1)

Puisque $\overrightarrow{DH} = 0x \overrightarrow{DA} + 0x \overrightarrow{DC} + 1x \overrightarrow{DH}$, on aura H(0 ; 0 ; 1)

Dans le repère $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DI})$:

Le point D étant l'origine du repère, on aura D(0 ; 0 ; 0)

Puisque $\overrightarrow{DA} = 1x \overrightarrow{DA} + 0x \overrightarrow{DC} + 0x \overrightarrow{DI}$, on aura A(1 ; 0 ; 0).

Puisque $\overrightarrow{DB} = 1x \overrightarrow{DA} + 1x \overrightarrow{DC} + 0x \overrightarrow{DI}$, on aura B(1 ; 1 ; 0)

Puisque $\overrightarrow{DC} = 0x \overrightarrow{DA} + 1x \overrightarrow{DC} + 0x \overrightarrow{DI}$, on aura C(0 ; 1 ; 0).

Puisque $\overrightarrow{DE} = 1x \overrightarrow{DA} + 0x \overrightarrow{DC} + 2x \overrightarrow{DI}$, on aura E(1 ; 0 ; 2)

Puisque $\overrightarrow{DF} = 1x \overrightarrow{DA} + 1x \overrightarrow{DC} + 2x \overrightarrow{DI}$, on aura F(1 ; 1 ; 2).

Puisque $\overrightarrow{DG} = 0x \overrightarrow{DA} + 1x \overrightarrow{DC} + 2x \overrightarrow{DI}$, on aura G(0 ; 1 ; 2)

Puisque $\overrightarrow{DH} = 0x \overrightarrow{DA} + 0x \overrightarrow{DC} + 2x \overrightarrow{DI}$, on aura H(0 ; 0 ; 2)

Exercice n°4

1) a) Puisque A est le point de coordonnées (1 ; 1 ; 0), cela signifie que $\vec{OA} = 1x \vec{OI} + 1x \vec{OJ} + 0x \vec{OK} = \vec{OI} + \vec{OJ}$

Le quadrilatère OIAJ est donc un parallélogramme.

b) Dans le repère orthonormé $(O; \vec{OI}; \vec{OJ}; \vec{OK})$, on a $OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2 + (z_A - z_O)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

2) a) Puisque B est le point de coordonnées (0 ; 1 ; 1), cela signifie que $\vec{OB} = 0x \vec{OI} + 1x \vec{OJ} + 1x \vec{OK} = \vec{OJ} + \vec{OK}$

Le quadrilatère OJBK est donc un parallélogramme.

b) Dans le repère orthonormé $(O; \vec{OI}; \vec{OJ}; \vec{OK})$, on a $OB = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2 + (z_B - z_O)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Exercice n°5

1)
$$\vec{AB} \begin{cases} x_B - x_A = 1 \\ y_B - y_A = -8 \\ z_B - z_A = 3 \end{cases}$$

2) Si I est le milieu de [AB], alors

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 1 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice n°6

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{61}$$

Exercice n°7

1) Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\vec{v} = \frac{2}{3} \vec{u}$

2) Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$

3) Le vecteur $2\vec{u}$ a pour coordonnées $2\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix}$. Le vecteur $5\vec{v}$ a pour coordonnées $5\vec{v} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$.

En soustrayant les coordonnées des deux vecteurs $2\vec{u}$ et $5\vec{v}$, le vecteur $2\vec{u} - 5\vec{v}$ aura donc pour coordonnées $2\vec{u} - 5\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -16 \end{pmatrix}$

Exercice n°8

Si $\vec{OC} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ alors les coordonnées de C sont C(5 ; 4 ; -1)

Le vecteur $\vec{AB}$ a donc pour coordonnées $\vec{AB} \begin{cases} x_B - x_A = -1 \\ y_B - y_A = 0 \\ z_B - z_A = -12 \end{cases}$ donc $2\vec{AB}$ a pour coordonnées $2\vec{AB} \begin{cases} -2 \\ 0 \\ -24 \end{cases}$

Le vecteur $\vec{AC}$ a donc pour coordonnées $\vec{AC} \begin{cases} x_C - x_A = 7 \\ y_C - y_A = 3 \\ z_C - z_A = -11 \end{cases}$ donc $4\vec{AC}$ a pour coordonnées $4\vec{AC} \begin{cases} 28 \\ 12 \\ -44 \end{cases}$

En additionnant les coordonnées des deux précédents vecteurs, le vecteur $\vec{u} = 4\vec{AC} + 2\vec{AB}$ aura donc pour coordonnées

$$\vec{u} = 4\vec{AC} + 2\vec{AB} \begin{cases} -2 + 28 = 26 \\ 0 + 12 = 12 \\ -24 + (-44) = -68 \end{cases}$$

Exercice n°9

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les coordonnées de A sont $A(10; 0; 0)$, celles de B $(0; 10; 0)$ et celles de C $(0; 0; 10)$.

Ainsi $\vec{OA}(10; 0; 0)$, $\vec{OB}(0; 10; 0)$ et $\vec{OC}(0; 0; 10)$

Puisque $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB}$, les coordonnées de $\vec{OD}$ donc celles de D, sont $\vec{OD}(10; 10; 0)$. Ainsi D $(10; 10; 0)$

Le vecteur $\vec{OE} = \frac{3}{2}\vec{OA} + \frac{2}{5}\vec{OB} - \frac{3}{10}\vec{OC}$ a donc pour coordonnées, donc le point E a pour coordonnées $E(15; 4; -3)$

Puisque $\vec{OF} = \vec{OA} + \vec{OC}$, les coordonnées de $\vec{OF}$ donc celles de F, sont $\vec{OF}(10; 0; 10)$. Ainsi F $(10; 0; 10)$

Puisque $\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$, les coordonnées de $\vec{OG}$ donc celles de G, sont $\vec{OG}\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$. Ainsi G $(10; 10; 10)$

Puisque $\vec{OH} = \vec{OB} + \vec{OC}$, les coordonnées de $\vec{OH}$ donc celles de H, sont $\vec{OH}\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$. Ainsi H $(0; 10; 10)$

Puisque $\vec{OK} = \frac{6}{5}\vec{OG} + \frac{1}{5}\vec{OE}$, les coordonnées de $\vec{OK}$ donc celles de K, sont

$$\vec{OK}\left(\frac{6}{5} \times 10 + \frac{1}{5} \times 15 = 15; \frac{6}{5} \times 10 + \frac{1}{5} \times 4 = \frac{64}{5}; \frac{6}{5} \times 10 + \frac{1}{5} \times (-3) = \frac{57}{5}\right).$$

Ainsi $K\left(15; \frac{64}{5}; \frac{57}{5}\right)$

Notons $L(x; y; z)$.

D'une part les coordonnées de $\vec{AL}$ sont
$$\vec{AL} \left| \begin{array}{l} x - x_A = x - 10 \\ y - y_A = y \\ z - z_A = z \end{array} \right.$$

D'autre part, les coordonnées de $\frac{2}{5}\vec{DB} - \frac{1}{2}\vec{OF}$ sont :

$$\frac{2}{5}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OF} \left| \begin{array}{l} \frac{2}{5} \times (x_B - x_D) - \frac{1}{2} \times (x_F - x_O) = \frac{2}{5} \times (-10) - \frac{1}{2} \times 10 = -9 \\ \frac{2}{5} \times (y_B - y_D) - \frac{1}{2} \times (y_F - y_O) = \frac{2}{5} \times 0 - \frac{1}{2} \times 0 = 0 \\ \frac{2}{5} \times (z_B - z_D) - \frac{1}{2} \times (z_F - z_O) = \frac{2}{5} \times 0 - \frac{1}{2} \times 10 = -5 \end{array} \right.$$

De l'égalité $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OF}$, on déduit $\begin{cases} x - 10 = -9 \\ y = 0 \\ z = -5 \end{cases}$.

Le point L a donc pour coordonnées L(1 ; 0 ; -5)

Exercice n°10

1^{ère} méthode Le point G centre de gravité du triangle ABC est le barycentre du système {(A,1);(B,1);(C,1)}.

Ainsi $\begin{cases} x_G = \frac{1 \times x_A + 1 \times x_B + 1 \times x_C}{1 + 1 + 1} = \frac{3}{3} = 1 \\ y_G = \frac{1 \times y_A + 1 \times y_B + 1 \times y_C}{1 + 1 + 1} = \frac{5}{3} \\ z_G = \frac{1 \times z_A + 1 \times z_B + 1 \times z_C}{1 + 1 + 1} = \frac{4}{3} \end{cases}$

2^{ème} méthode : Le point G vérifie l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AI}$ où I est le milieu de [BC]

Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{x_B + x_C}{2} = 0; \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5}{2}; \frac{z_B + z_C}{2} = 2 \right)$

Le vecteur $\frac{2}{3} \overrightarrow{AI}$ a donc pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}(x_I - x_A) = -2; \frac{2}{3}(y_I - y_A) = \frac{5}{3}; \frac{2}{3}(z_I - z_A) = \frac{4}{3} \right)$

Notons G(x;y;z). D'une part les coordonnées de $\overrightarrow{AG}$ sont $\overrightarrow{AG} \left| \begin{array}{l} x - x_A = x - 3 \\ y - y_A = y \\ z - z_A = z \end{array} \right.$.

L'égalité $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AI}$ implique $\begin{cases} x-3 = -2 \\ y = -\frac{5}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{cases}$. On retrouve bien les coordonnées de $G\left(1; -\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Exercice n°11

1) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ $\begin{cases} x_B - x_A = 2 \\ y_B - y_A = -2 \\ z_B - z_A = 2 \end{cases}$
 $\overrightarrow{AC}$ $\begin{cases} x_C - x_A = 2 \\ y_C - y_A = 1 \\ z_C - z_A = -10 \end{cases}$
 et $\overrightarrow{AD}$ $\begin{cases} x_D - x_A = x-2 \\ y_D - y_A = y-1 \\ z_D - z_A = z-3 \end{cases}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel k unique satisfaisant aux trois conditions $\begin{cases} 2k = 2 \\ -2k = 1 \\ 2k = -10 \end{cases}$.

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés.

2) a) Notons $D(x; y; z)$.

Alors $\overrightarrow{AD}$ $\begin{cases} x_D - x_A = x-2 \\ y_D - y_A = y-1 \\ z_D - z_A = z-3 \end{cases}$ donc $3\overrightarrow{AD}$ $\begin{cases} 3(x_D - x_A) = 3x-6 \\ 3(y_D - y_A) = 3y-3 \\ 3(z_D - z_A) = 3z-9 \end{cases}$.

Comme
$$\begin{array}{l|l} 2\overrightarrow{AB} & \begin{cases} 2(x_B - x_A) = 4 \\ 2(y_B - y_A) = -4 \\ 2(z_B - z_A) = 4 \end{cases} \\ \overrightarrow{BC} & \begin{cases} x_C - x_B = 0 \\ y_C - y_B = 3 \\ z_C - z_B = -12 \end{cases} \end{array}, \text{ l'égalité } 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

entraîne
$$\begin{cases} 4 + 3x - 6 = 0 \\ -4 + 3y - 3 = 3 \\ 4 + 3z - 9 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{10}{3} \\ z = -\frac{7}{3} \end{cases}.$$

Ainsi $D\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{7}{3}\right)$.

b) Les coordonnées du milieu E de [BC]

sont
$$\left(x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = 4; y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1}{2}; z_E = \frac{z_B + z_C}{2} = -1\right)$$

c) 1^{ère} méthode : Le point F centre de gravité du triangle ABC est le barycentre du système $\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$.

Ainsi
$$\begin{cases} x_F = \frac{1 \times x_A + 1 \times x_B + 1 \times x_C}{1 + 1 + 1} = \frac{10}{3} \\ y_F = \frac{1 \times y_A + 1 \times y_B + 1 \times y_C}{1 + 1 + 1} = \frac{2}{3} \\ z_F = \frac{1 \times z_A + 1 \times z_B + 1 \times z_C}{1 + 1 + 1} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

2^{ème} méthode : On aurait pu utiliser l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AE}$ vérifiée par le point F.

d) Notons G(x;y;z).

Alors
$$\begin{array}{l|l} \overrightarrow{GA} & \begin{cases} x_A - x_G = 2 - x \\ y_A - y_G = 1 - y \\ z_A - z_G = 3 - z \end{cases} \\ 3\overrightarrow{GA} & \begin{cases} 3(x_A - x_G) = 6 - 3x \\ 3(y_A - y_G) = 3 - 3y \\ 3(z_A - z_G) = 9 - 3z \end{cases} \end{array} \text{ donc }.$$

De plus
$$\begin{array}{l|l} \overrightarrow{GB} & \begin{cases} x_B - x_G = 4 - x \\ y_B - y_G = -1 - y \\ z_B - z_G = 5 - z \end{cases} \\ 2\overrightarrow{GB} & \begin{cases} 2(x_B - x_G) = 8 - 2x \\ 2(y_B - y_G) = -2 - 2y \\ 2(z_B - z_G) = 10 - 2z \end{cases} \end{array} \text{ donc }.$$

$$\text{Enfin } \overrightarrow{CG} \begin{cases} x_G - x_C = x - 4 \\ y_G - y_C = y - 2 \\ z_G - z_C = z + 7 \end{cases}$$

De l'égalité $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{CG}$, on

$$\text{déduit } \begin{cases} 6 - 3x - (8 - 2x) = x - 4 \\ 3 - 3y - (-2 - 2y) = y - 2 \\ 9 - 3z - (10 - 2z) = z + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ 2y = 7 \\ 2z = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{7}{2} \\ z = -4 \end{cases}.$$

Ainsi $G\left(1; \frac{7}{2}; -4\right)$

Exercice n°12

On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \begin{cases} x_B - x_A = 2 \\ y_B - y_A = 3 \\ z_B - z_A = 4 \end{cases}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{cases} x_C - x_A = 4 \\ y_C - y_A = 6 \\ z_C - z_A = 8 \end{cases}.$

Puisque $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les points A, B et C sont alignés.

Exercice n°13

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB} \begin{cases} x_B - x_A = -\frac{3}{2} \\ y_B - y_A = -1 \\ z_B - z_A = -\frac{9}{2} \end{cases}.$

Si on note $D(x;y;z)$, les coordonnées de $\overrightarrow{DC}$ sont $\overrightarrow{DC} \begin{cases} x_C - x = -x \\ y_C - y = -5 - y \\ z_C - z = 3 - z \end{cases}.$

L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ entraîne donc
$$\begin{cases} -x = -\frac{3}{2} \\ -5 - y = -1 \\ 3 - z = -\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -4 \\ z = \frac{15}{2} \end{cases}.$$

Les coordonnées de D sont donc $D\left(\frac{3}{2}; -4; \frac{15}{2}\right)$

Exercice n°14

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} x_B - x_A = -2 \\ y_B - y_A = 1 \\ z_B - z_A = \frac{1}{2} \end{vmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{vmatrix} x_C - x_A = 1 \\ y_C - y_A = 0 \\ z_C - z_A = -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$

et $\overrightarrow{AD} \begin{vmatrix} x_D - x_A = 0 \\ y_D - y_A = 1 \\ z_D - z_A = -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$

D'après leur coordonnées, on constate que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, ce qui implique que le point D appartient au plan formé par les trois autres points A,B,C, donc que A,B,C et D sont coplanaires

Exercice n°15

1) Un vecteur normal au plan P est le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) a) Un point M de P est, par exemple M(0;0;7)

b) Le point $L(1;-1;2)$ appartient au plan P si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan P .

On calcule $x_L+3y_L-z_L+7=1+3(-1)-2+7=3 \neq 0$

Les coordonnées de L ne vérifiant pas l'équation du plan P , le point L n'appartient pas à P

c) Le point $N(2;5;z)$ appartient au plan P si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan P , donc si et seulement si

$$x_N+3y_N-z_N+7=0 \Leftrightarrow 2+3 \times 5 - z + 7 = 0 \Leftrightarrow z = 24.$$

Le point N est donc $N(2;5;24)$

Exercice n°16

1) Un vecteur normal au plan P est le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) Notons $A(x_A; y_A; z_A)$.

Si A appartient à l'axe des abscisses (Ox), alors $y_A = z_A = 0$.

Si de plus A appartient au plan P , ses coordonnées vérifient l'équation de P , à savoir $2x_A + y_A + z_A = 6 \Leftrightarrow 2x_A = 6 \Leftrightarrow x_A = 3$

Ainsi $A(3;0;0)$

b) Notons $B(x_B; y_B; z_B)$.

Si B appartient à l'axe (Oy), alors $x_B = z_B = 0$.

Si de plus B appartient au plan P , ses coordonnées vérifient l'équation de P , à savoir $2x_B + y_B + z_B = 6 \Leftrightarrow y_B = 6$.

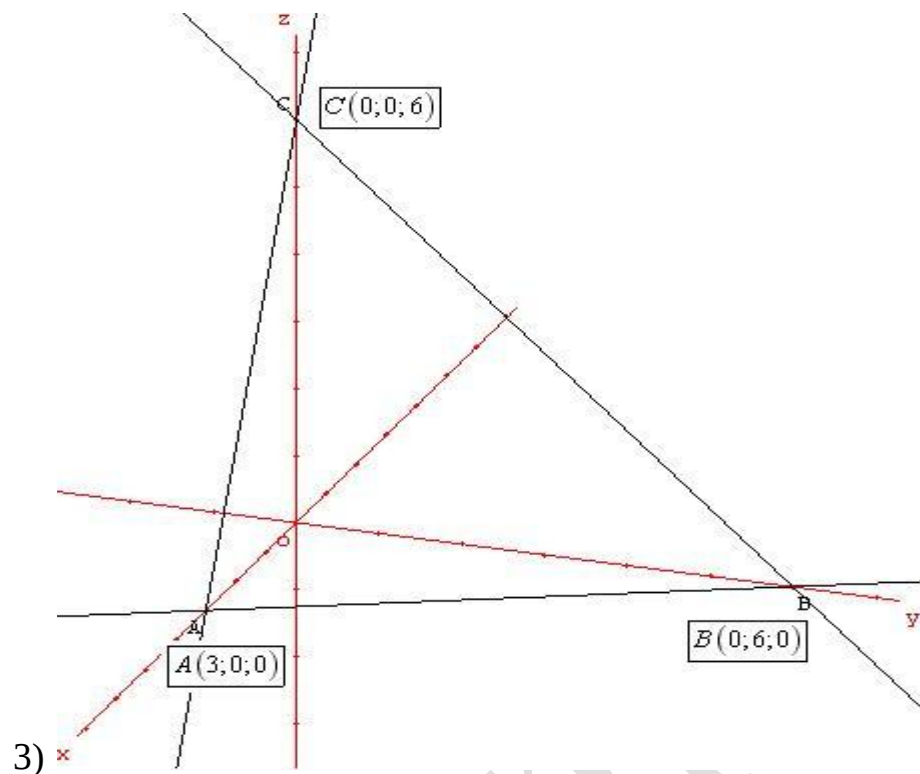
Le point B est donc $B(0;6;0)$

c) Notons $C(x_C; y_C; z_C)$.

Si C appartient à l'axe (Oz), alors $x_C = y_C = 0$.

Si de plus C appartient au plan P , ses coordonnées vérifient l'équation de P , à savoir $2x_C + y_C + z_C = 6 \Leftrightarrow z_C = 6$.

Le point C est donc C(0;0;6)



Exercice n°17

1) On calcule les coordonnées des vecteurs

$$\overrightarrow{AB} \begin{cases} x_B - x_A = 5 \\ y_B - y_A = -1 \\ z_B - z_A = -5 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{cases} x_C - x_A = 4 \\ y_C - y_A = -1 \\ z_C - z_A = -3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} \begin{cases} x_D - x_C = 5 \\ y_D - y_C = -1 \\ z_D - z_C = -5 \end{cases}$$

2) a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel k unique

$$\begin{cases} 5k = 4 \\ -k = -1 \\ -5k = -3 \end{cases}$$

satisfaisant aux trois conditions

b) A la lecture de leur coordonnées, on constate que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, donc que (AB)//(CD)

3) a) On calcule : $2x_A+5y_A+z_A=2x(-3)+5x4+6=-6+20+6=20$, puis

$$2x_B+5y_B+z_B=2x2+5x3+1=4+15+1=20$$

$$2x_C+5y_C+z_C=2x1+5x3+3=2+15+3=20$$

$$2x_D+5y_D+z_D=2x6+5x2+(-2)=12+10-2=20$$

Les coordonnées e A,B,C et D vérifient donc cette équation.

b) Si A,B et S sont alignés, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont colinéaires.

Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AS} = t \overrightarrow{AB}$

Notons $S(x;y;z)$.

Alors $\overrightarrow{AS} \begin{cases} x_S - x_A = x + 3 \\ y_S - y_A = y - 4 \\ z_S - z_A = z - 6 \end{cases}$, et de l'égalité $\overrightarrow{AS} = t \overrightarrow{AB}$ on

$$\text{dédit } \begin{cases} x + 3 = 5t \\ y - 4 = -t \\ z - 6 = -5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5t - 3 \\ y = -t + 4 \\ z = -5t + 6 \end{cases}$$

Mais puisque $x_S=7$, on aura alors $5t-3=7 \Leftrightarrow t=2$.

Le point S est donc $S(7;2;-4)$

c) Si O,F et P sont alignés, alors les vecteurs $\overrightarrow{OF}$ et $\overrightarrow{OP}$ sont colinéaires.

Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OP} = t \overrightarrow{OF}$

Notons $P(x;y;z)$.

Alors $\overrightarrow{OP} \begin{cases} x_P - x_O = x \\ y_P - y_O = y \\ z_P - z_O = z \end{cases}$ et $\overrightarrow{OF} \begin{cases} x_F - x_O = 1 \\ y_F - y_O = 1 \\ z_F - z_O = 1 \end{cases}$.

De l'égalité $\overrightarrow{OP} = t \overrightarrow{OF}$ on déduit $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

Mais puisque le point P vérifie l'équation de (E) on doit avoir $2t+5t+t=20 \Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$.

Ainsi $P(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; \frac{5}{2})$

Exercice n°18

Un vecteur normal au plan $P_1 : -x+y+2z-1=0$ est le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Un vecteur normal au plan $P_2 : 3x-y=0$ est le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Un vecteur normal au plan $P_3 : 2y-1=0$ est le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Un vecteur normal au plan $P_4 : 2x-z+3=0$ est le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice n°19

1) Si $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P_1 , celui-ci a une équation de la forme $P_1: 3x+2y+z+d=0$

On utilise les coordonnées du point $A(2;-3;5)$ pour déterminer d .

$$3x_A+2y_A+z_A+d=0 \Leftrightarrow d=-3x_A-2y_A-z_A, \text{ c'est-à-dire } d=-3 \times 2 - 2 \times (-3) - 5 = -5.$$

L'équation de P_1 est donc $P_1: 3x+2y+z-5=0$

2) Si $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P_2 , celui-ci a une équation de la forme $P_2: 5x+3y+2z+d=0$

On utilise les coordonnées du point $A(4;-2;1)$ pour déterminer d .

$$5x_A+3y_A+2z_A+d=0 \Leftrightarrow d=-5x_A-3y_A-2z_A, \text{ c'est-à-dire } d=-5 \times 4 - 3 \times (-3) - 2 \times 1 = -16.$$

L'équation de P_2 est donc $P_2: 5x+3y+2z-16=0$

3) Si $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P_3 , celui-ci a une équation de la forme $P_3: 2y+z+d=0$

On utilise les coordonnées du point $A(1;1;0)$ pour déterminer d .

$$2y_A+z_A+d=0 \Leftrightarrow d=-2y_A-z_A, \text{ c'est-à-dire } d=-2 \times 1 - 0 = -2.$$

L'équation de P_3 est donc $P_3: 2y+z-2=0$

Exercice n°20

1) Un vecteur normal au plan P d'équation : $2x-3y+6z-18=0$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

2) Si le plan P' est parallèle au plan P , alors $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur normal à P' qui aura donc une équation de la forme $2x-3y+6z+d=0$.

On détermine d grâce aux coordonnées du point $B(6;-4;-4)$:

$$2x_B-3y_B+6z_B+d=0 \Leftrightarrow d=-2x_B+3y_B-6z_B=0.$$

L'équation de P' est donc $2x-3y+6z=0$.

Exercice n°21

Notons $A(x;y;z)$. Si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = t \vec{n}$

On calcule $\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} x_B - x_A = 6 - x \\ y_B - y_A = -4 - y \\ z_B - z_A = -4 - z \end{vmatrix}$ et $t \vec{n} \begin{vmatrix} 2t \\ -3t \\ 6t \end{vmatrix}$.

De l'égalité $\overrightarrow{AB} = t \vec{n}$, on déduit
$$\begin{cases} 6 - x = 2t \\ -4 - y = -3t \\ -4 - z = 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = 3t - 4 \\ z = -4 - 6t \end{cases}$$

Mais si A est un point du plan P, ses coordonnées vérifient l'équation de P, à savoir $2x_A - 3y_A + 6z_A - 18 = 0$,

donc
$$2(6 - 2t) - 3(3t - 4) + 6(-4 - 6t) - 18 = 0 \Leftrightarrow -49t = 18 \Leftrightarrow t = -\frac{18}{49}$$

Le point A est donc
$$\begin{cases} x = 6 - 2 \times \left(-\frac{18}{49}\right) = \frac{330}{49} \\ y = 3 \times \left(-\frac{18}{49}\right) - 4 = -\frac{250}{49} \\ z = -4 - 6 \times \left(-\frac{18}{49}\right) = -\frac{88}{49} \end{cases}$$

La distance entre les plans parallèles P et P' est donnée par

$$\begin{aligned} AB &= \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \\ &= \sqrt{\left(6 - \frac{330}{49}\right)^2 + \left(-4 + \frac{250}{49}\right)^2 + \left(-4 + \frac{88}{49}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1296}{2401} + \frac{2916}{2401} + \frac{11664}{2401}} = \sqrt{\frac{15876}{2401}} = \sqrt{\frac{324}{49}} = \boxed{\frac{18}{7}} \end{aligned}$$

Exercice n°22

1) Un vecteur normal du plan P d'équation $2x + y - z = 5$ est $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Un vecteur normal du plan P' d'équation $-x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 7$ est $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Les vecteurs $n_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ n'étant pas colinéaires (il n'existe pas

de réel k unique satisfaisant à la fois
$$\begin{cases} 2k = -1 \\ 1 \times k = \frac{1}{2} \\ (-1) \times k = -\frac{1}{2} \end{cases},$$

les deux plans P et P' ne sont pas parallèles

2) Un vecteur normal du plan P d'équation $x+3y-5z=4$ est $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

Un vecteur normal du plan P' d'équation $-3x-9y+15z=-6$ est $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 15 \end{pmatrix}$

Puisque $\vec{n}_2 = -3\vec{n}_1$, les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires, donc les deux plans P et P' sont parallèles.

3) Un vecteur normal du plan P d'équation $x+3y-2z=8$ est $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Un vecteur normal du plan P' d'équation $-4x-12y+8z=-32$ est $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix}$

Puisque $\vec{n}_2 = -4\vec{n}_1$, les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires, donc les deux plans P et P' sont parallèles

Exercice n°23

1) On calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{AB} \begin{cases} x_B - x_A = 1 \\ y_B - y_A = -1 \\ z_B - z_A = 1 \end{cases}$
 $\vec{AC} \begin{cases} x_C - x_A = -2 \\ y_C - y_A = 1 \\ z_C - z_A = 0 \end{cases}$,

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires car il n'existe pas

de réel k unique satisfaisant aux trois conditions $\begin{cases} k = -2 \\ -k = 1 \\ k = 0 \end{cases}$.

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés, donc définissent un plan (ABC) .

b) Notons $\vec{n}(a;b;c)$ les coordonnées d'un vecteur normal à (ABC)

Puisque $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$, on a $1 \times a + (-1) \times b + 1 \times c = 0 \Leftrightarrow a - b + c = 0$

Puisque $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0$, on a $(-2) \times a + 1 \times b + 0 \times c = 0 \Leftrightarrow -2a + b = 0$

Le système $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ -2a + b = 0 \end{cases}$ de deux équations à trois inconnues admettant une infinité de solutions, on doit « fixer arbitrairement » une valeur pour l'une quelconque des inconnues.

L'énoncé nous conseille de choisir $a=1$

Le système devient alors
$$\begin{cases} a = 1 \\ 1 - b + c = 0 \\ -2 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = b - 1 = 1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Un vecteur normal à (ABC) est donc $\vec{n}(1;2;1)$.

c) Une équation du plan (ABC) est alors $x+2y+z+d=0$.

On détermine d en utilisant les coordonnées de l'un des points de ce plan, par exemple A(2 ; 1 ; 1).

On obtient $x_A + 2y_A + z_A + d = 0 \Leftrightarrow d = -x_A - 2y_A - z_A = -2 - 2 - 1 = -5$

Une équation du plan (ABC) est alors $x+2y+z-5=0$.

2) Une équation de (ABC) étant de la forme $ax+by+cz+d=0$, les coordonnées de A, B et C vérifient cette équation de plan, nous permettent de dresser le système de trois équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \\ ax_B + by_B + cz_B + d = 0 \\ ax_C + by_C + cz_C + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c + d = 0 \\ 3a + 2c + d = 0 \\ 2b + c + d = 0 \end{cases}$$

Ce système admettant une infinité de solutions, on doit « fixer arbitrairement » une valeur pour l'une quelconque des inconnues.

On fixe par exemple $a = 1$

Le système devient :

$$\begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ 2b+c+d=0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ -c-d=4 & L_4 = L_3 - 2L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ c=1 & L_4 + L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2-c-d=2 & L_1 \\ d=-3-2c=-5 & L_2 \\ c=1 & \end{cases} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ + L_2 \end{matrix}$$

On retrouve alors l'équation $x+2y+z-5=0$

Exercice n°24

1) P et P' admettent pour vecteurs
normaux les vecteurs $n_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -1 \end{pmatrix}$ et $n_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}$

Le produit
scalaire $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (\cos t)(\cos t) + (\sin t)(\sin t) + (-1)(1) = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$
nous permet d'affirmer que les plans P et P' sont perpendiculaires.

2) l'axe Ox est parallèle à P pour toutes les valeurs de t pour
lesquelles $\vec{n}_1(\cos t; \sin t, -1)$, vecteur normal à P sera orthogonal à
tout vecteur directeur de l'axe Ox.

Un vecteur directeur de l'axe (Ox) est $\vec{u}(1;0;0)$. Le produit
scalaire $\vec{n}_1 \cdot \vec{u} = (\cos t) \times 1 + (\sin t) \times 0 + (-1)(0) = \cos t$.

Pour $t = \frac{\pi}{2} [2\pi]$, $\vec{n}_1 \cdot \vec{u} = \cos t = 0$, donc l'axe (Ox) est parallèle à P.

3) Les coordonnées des points de la droite intersection des deux plans vérifient le système
$$\begin{cases} (\cos t)x + (\sin t)y - z = 0 \\ (\cos t)x + (\sin t)y + z = 0 \end{cases}, \text{ soit, par soustraction des deux lignes, } \begin{cases} (\cos t)x + (\sin t)y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos t)x + (\sin t)y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Si $t = \frac{\pi}{2} [2\pi]$, puisque $\cos t = 0$ et $\sin t = 1$, le système est équivalent à
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}.$$

Un vecteur directeur de la droite intersection des deux plans est $\vec{v}(1;0;0)$

Si $t \neq \frac{\pi}{2} [2\pi]$,
$$\begin{cases} (\cos t)x + (\sin t)y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda \tan t \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$
 Un vecteur directeur de la droite intersection des deux plans est $\vec{v}(-\tan t; 1; 0)$

4) La distance de $A(\cos t, \sin t, -3)$ au plan P vaut
$$\frac{|(\cos t)(\cos t) + (\sin t)(\sin t) + 3|}{\sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2 + (-1)^2}} = \frac{|1 + 3|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$