correction devoir N°1

Guesmi.B

EXERCICE1

1)$41 = 27 + 14$; $27 = 14 + 13$; $14 = 13 + 1$

donc : $1 = 14 - 13 = 14 - (27 - 14) = 2 * 14 - 27$

$= 2 * (41 - 27) - 27 = 2 * 41 - 3 * 27 = 1$

2) $41 * 2 - 27 * 3 = 1$ d'où : $41 * 10 - 27 * 15 = 5$ (en multipliant par 5) .

3) $\begin{cases} 3/45 \\ 3/27 \end{cases} \Rightarrow$: $3/45x + 27y$ or $3 \nmid 1$ donc $45x + 27y \neq 1$,$\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

EXERCICE2

Soit n un entier naturel .On considère les nombres : $a = n^3 - 2n + 5$ et $b = n + 1$.

1) $(n + 1)(n^2 - n - 1) + 6 = n^3 - n^2 - n + n^2 - n - 1 = n^3 - 2n + 5$

2)d'aprés 1) : $a = b(n^2 - n - 1) + 6$

Notons d un diviseur commun de a et b . On sait déjà que : d/b donc $d/b(n^2 - n - 1)$

De plus : d/a et $d/b(n^2 - n - 1)$ entraine : $d/a - b(n^2 - n - 1)$ soit $d/6$.

Donc $d \in Div(b, 6)$. On a alors : $Div(a, b) \subset Div(b, 6)$

réciproquement soir d' un diviseur commun de b et 6

d'/b et $d'/6 \Rightarrow d'/a$ (car $a = b + 6$)

et on a obtenu : $Div(b, 6) \subset Div(a, b)$

on peut donc conclure : $Div(a, b) = Div(b, 6)$ ce qui entraine : $a \wedge b = b \wedge 6$

3) D'après 2) $a \wedge b = 6 \Leftrightarrow b \wedge 6 = 6$

Cela revient donc à dire que: $6/b$

Or $n = 6q + r$ avec $0 \leq r < 6$

Donc $b = n + 1 = 6q + r + 1$

On obtient donc que ; $6/r + 1$ d'où $r = 5$

n doit être de la forme : $6q + 5$

4) d'aprés 1) : $a = b(n^2 - n - 1) + 6$

donc : $\frac{a}{b} = (n^2 - n - 1) + \frac{6}{b}$

$\frac{a}{b}$ est un entier $\Leftrightarrow$ $\frac{6}{b}$ est un entier$\Leftrightarrow$ $b/6 \Leftrightarrow n+1 = 1, 2, 3$ ou $6 \Leftrightarrow n = 0, 1, 2$ ou 5 .

EXERCICE3

Cherchons u et v tels que : $u(6n + 1) + v(15n + 3) = 1$

celà équivaut à : $n(6u + 15v) + u + 3v = 1$

c'est vrai pour tout n si et seulement si : $\begin{cases} 6u + 15v = 0 \\ u + 3v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6(1 - 3v) + 15v = 0 \\ u = 1 - 3v \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 2 \\ u = -5 \end{cases}$$

D'aprés le théorème de Bezout , on en déduit que : $6n+1$ et $15n+3$ sont premiers entre eux

exercice 4 :

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^2-x}{x\sqrt{x}+1}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^2(1-\frac{1}{x})}{x\sqrt{x}(1+\frac{1}{x\sqrt{x}})}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x}\frac{(1-\frac{1}{x})}{(1+\frac{1}{x\sqrt{x}})}=+\infty$$

car .... (rq: $\frac{x^2}{x\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{x}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=\sqrt{x}$)

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{2x+3}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{2x+3}*\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^2-x^2-1}{(2x+3)(x+\sqrt{x^2+1})}=\boxed{0}$ (le dénominateur tend vers $+\infty$ .....)

$$\lim_{x\longrightarrow1}\frac{x^3+x-2}{x^2+x-2}=\lim_{x\longrightarrow1}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\longrightarrow1}\frac{(x^2+x+2)}{(x+2)}=\frac{4}{3}$$

exercice 5 :

f est la composée de $(x-1)^3$ et de $\sqrt{\ }$

f est donc dérivable en x lorsque :

1. $(x-1)^3$ est dérivable en x
2. $\sqrt{\ }$ est dérivable en $(x-1)^3$

la première condition est vérifiée pour tout x réel .

la deuxième l'est lorsque : $(x-1)^3>0\Leftrightarrow x>1$

On a donc une conclusion partielle : f est dérivable sur $]1;+\infty[$

Voyons maintenant la dérivabilité en 1 :

(notons que , d'après la forme du domaine :$x-1\geq0$ donc $\sqrt{(x-1)^2}=x-1$)

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{(x-1)^2*(x-1)}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\sqrt{(x-1)}}{x-1}=\lim_{x\to1}\sqrt{x-1}=0\in\mathbb{R}$$

f est donc aussi dérivable en 1