Exercices sur les nombres complexes

Qcm 1

une seule réponse est exacte.

Une réponse exacte rapporte 1 point

		A	B	C	D
1	$Z=\dfrac{2+4i}{2-i}$	Le point M d'affixe Z est sur le cercle trigonométrique.	$Z=\overline{Z}$	Z est un imaginaire pur.	$Z=\dfrac{2}{3}i$
2	$Z=\sqrt{3}-i$	Un argument de Z est $-\dfrac{5\pi}{6}$.	Un argument de $\overline{Z}$ est $\dfrac{\pi}{6}$	Le point M d'affixe Z est sur le cercle de centre O, de rayon $\sqrt{2}$	Le point M d'affixe Z^2 est sur l'axe des ordonnées.
3	z vérifie $\overline{z}+\lvert z\rvert=6+2i$; l'écriture algébrique de z est :	$\dfrac{8}{3}-2i$	$-\dfrac{8}{3}-2i$	$\dfrac{8}{3}+2i$	$-\dfrac{8}{3}+2i$

Correction

1. Le plus simple est de simplifier Z : $Z=\dfrac{2+4i}{2-i}=\dfrac{(2+4i)(2+i)}{4+1}=2i$. Donc reponse **C.**

2. Rien qu'en faisant la figure on voit que **B** est juste (arg(Z)=− π/6). On peut voir les autres réponses : le module de Z est 2, **C** n'est pas bon ; pour **D** : $z^2=3-1+2i\sqrt{3}=2+2i\sqrt{3}$ donc faux.

3. Comme $\lvert z\rvert$ est un réel, il faut que $\overline{z}=...+2i$, soit $z=\ldots-2i$. Ceci élimine **C** et **D**. Ce module vaut 10/3, il faut donc que la partie réelle fasse 8/3, réponse **A**.

Qcm 2

Dans chacun des cas suivants,répondreparVRAIouFAUX.Aucunejustificationn'estdemandée

1. Le nombre complexe $(1+i)^{10}$ est imaginaire pur.

2. Le nombre complexe $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$ est de module 1 et l'un de ses arguments est $\dfrac{7\pi}{3}$.

3. A est le point d'affixe $-1+2i$ dans un repère orthonormal. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $(z+1-2i)(\overline{z}+1+2i)=4$ est le cercle de centre A et de rayon 4.

Correction

1. **Vrai** : si on passe en forme trigonométrique c'est immédiat : $(1+i)^{10}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{10}=2^5e^{i\frac{5\pi}{2}}=32i$.

2. **Faux** : $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{(1+i)^2}=\dfrac{\cancel{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\cancel{2}i}=e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{2}}=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ donc de module 1 mais d'argument $-\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{7\pi}{6}(2\pi)$.

3. **Faux** : on développe : $(z+1-2i)(\overline{z}+1+2i)=z\overline{z}+(1-2i)\overline{z}+(1+2i)z+1-4i^2$ d'où en remplaçant z par $x+iy$, $x^2+y^2+(1-2i)(x-iy)+(1+2i)(x+iy)+5=4\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-4y+1=0\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=4$
rayon est 2.

on remarque que $\overline{z}+1+2i=\overline{z+1-2i}$ d'où $\lvert z-(-1+2i)\rvert^2=4$ mais la conclusion est identique.

VRAI-FAUX 1

On considère le nombre complexe : $Z=-\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}e^{\frac{i\pi}{3}}$.

a. On a : $\lvert Z\rvert=1$.

b. On a : $Z=-(1-i)e^{\frac{i\pi}{3}}$.

c. Le réel $-\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de Z.

d. On a : $Z = e^{\frac{13i\pi}{12}}$.

Correction

a. **Vrai:** On a : $|Z| = \left|-\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right| . \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.1 = 1$.

b. **Faux**: On a : $Z = -\frac{\sqrt{2}(1-i)}{1+1}e^{\frac{i\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)e^{\frac{i\pi}{3}}$.

c. **Faux**: Le réel $Z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{\frac{i\pi}{3}} = e^{\frac{i3\pi}{4}}e^{\frac{i\pi}{3}} = e^{\frac{i13\pi}{12}}$ or $\frac{13\pi}{12} \neq -\frac{\pi}{12}(2\pi)$.

d. **Vrai:** On a : $Z = e^{\frac{13i\pi}{12}}$.

4. VRAI-FAUX 2

Question 8. On considère les nombres complexes $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 1 - i$. Alors :

a. $\arg a = \frac{\pi}{3}$.

b. Il existe au moins un p de $\mathbb{C}^*$ tel que a^p soit réel.

c. Il existe au moins un q de $\mathbb{C}^*$ tel que a^q soit imaginaire pur.

d. Il existe au moins un n $\mathbb{C}^*$ tel que $b^n = 1$.

e. Il existe au moins un m $\mathbb{C}^*$ tel que a^m et b^m soient réels.

Correction

a. **Vrai** : $a = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $\arg a = \frac{\pi}{3}$.

b. **Vrai** : a^p est réel si $p\frac{\pi}{3} = k\pi$ soit $p = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

c. **Faux :** a^q est imaginaire pur si $q\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ soit $q = \frac{3}{2} + 3k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ donc $q \notin \mathbb{N}^*$.

d. **Faux** : $b = 1 - i = \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$ d'où $|b| = \sqrt{2} > 1$ donc $b^n = 1$ n'a pas de solution.

e. **Vrai** : b^m est réel si $m\frac{\pi}{4} = k\pi$ soit $m = 4k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Et d'après B) a^m est réel si $m = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Donc a^m et b^m sont réels si m est un multiple de 3 et 4 comme par exemple $\{12 ; 24 ; 36...\}$.

5. VRAI-FAUX 3

Question 9. Dans le plan muni d'un repère (o;i|,j|) un repere orthonormé M d'affixe a et N d'affixe b tels que a et b soient les solutions de l'équation : $z^2 - 2z + 3 = 0$. On a :

a. $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = ab$.

b. $a + b$ est un nombre réel.

c. Le milieu de $[M, N]$ est sur l'axe des abscisses.

d. La droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées.

e. M et N appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

Correction

a. **Faux** : Résolvons l'équation :. $\Delta = \left(2i\sqrt{2}\right)^2$ d'où $a = 1 + i\sqrt{2}$ et $b = 1 - i\sqrt{2}$ donc $b = \bar{a}$. Les affixes de $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ dans le plan muni d'un repère $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ sont respectivement a et b.

On a donc $ab = a\bar{a} = |a|^2 = 1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3$ et $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = 1 \cdot 1 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = -1$.

b. **Vrai :** $a + b = a + \bar{a} = 2\mathrm{Re}(a) = 2$. C'est un réel.

c. **Vrai :** Le milieu de $[M, N]$ a pour affixe $\frac{a+b}{2} = \frac{a+\bar{a}}{2} = 1$ donc il est sur l'axe des abscisses.

d. **Vrai :** Les points M et N ont la même abscisse égale à 1 donc la droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées.

e. **Faux** : On a $|a| = |\bar{a}| = |b| = \sqrt{3}$ donc M et N appartiennent au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$

6) un peut de calcul

a. On considère le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Mettre z sous forme trigonométrique. Calculer z^2 et z^3. En déduire z^{1992} et z^{1994}.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3+8=0$ (on remarquera que cette équation a une racine évidente réelle) . En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(iz-1)^3+8=0$. Donner les solutions sous forme algébrique.

Correction

a. $z=1-i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$z^2=4e^{-i\frac{2\pi}{3}}=-2-2i\sqrt{3}, z^3=8e^{-i\frac{3\pi}{3}}=-8$.

Comme on tourne à chaque fois de 60°, tous les exposants multiples de 3 ramèneront sur l'axe réel (un coup positif, un coup négatif) ; tous les multiples de 3 +1 (comme 1, 4, 7, …) seront sur la droite issue de O et passant par z, enfin tous les multiples de 3 + 2 seront sur la droite issue de O passant par z^2.

1992 est un multiple de 6 (3x332), on a $z^{1992}=2^{1992}e^{-332i\pi}=2^{1992}$, et $z^{1994}=2^{1994}e^{-i\frac{2\pi}{3}}=2^{1994}(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

b. $z^3+8=0$ a comme racine évidente -2 ; on factorise z + 2 : $z^3+8=(z+2)(az^2+bz+c)$ ce qui donne en développant et identifiant les coefficients : $z^3+8=(z+2)(z^2-2z+4)$.

Les autres racines sont alors : $z_1=1+i\sqrt{3}, z_2=1-i\sqrt{3}$.

Pour résoudre $(iz-1)^3+8=0$ on reprend l'équation précédente avec le changement d'inconnue $Z=iz-1$, ce qui donne les solutions en Z ; on revient en arrière pour les solutions en z.

$Z=iz-1 \Leftrightarrow iz=Z+1 \Leftrightarrow z=\frac{Z+1}{i}=-iZ-i$ d'où les trois solutions :

$$z_0=-i(-2)-i=i,\ z_1=-i(1+i\sqrt{3})-i=\sqrt{3}-2i \text{ et } z_2=-i(1-i\sqrt{3})-i=-\sqrt{3}-2i.$$

7. un peut de calcul

On donne le nombre complexe $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

a. Exprimer z^2 sous forme algébrique

b. Exprimer z^2 sous forme exponentielle.

c. En déduire z sous forme exponentielle.

Correction

a.

$$z^2=\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2=2+\sqrt{2}-2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}+i^2(2-\sqrt{2})$$

$$=2+\sqrt{2}-2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}-2+\sqrt{2}=2\sqrt{2}-2i\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}.$$

b. $z^2=2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

c. $z^2=4e^{-i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow |z^2|=|z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2, \arg(z^2)=-\frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow 2\arg(z)=-\frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow \arg(z)=-\frac{\pi}{8}[\pi]$.

Sur $[-\pi\,;\pi[$, on aurait soit $z_1=2e^{-i\frac{\pi}{8}}$, soit $z_2=2e^{i\left(-\frac{\pi}{8}+\pi\right)}=2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

Le signe de la partie réelle et de la partie imaginaire de z donné dans l'énoncé nous donne $z=z_2=2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

8. Second degré

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré $Z^2+Z+1=0$

1. Résoudre cette équation. On note les solutions z_1 et z_2, la partie imaginaire de z_1 étant positive.
2. Vérifier que $z_2=z_1^2$.
3. Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
4. Indiquer sur quel cercle de centre O sont situés les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2. Placer alors ces points avec précision dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 4 cm.

Correction

1. Une équation ultra-classique qui donne les racines $z_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

2. $z_1^2=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2=e^{i\frac{4\pi}{3}}=\frac{1-3-2i\sqrt{3}}{2}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}=z_2$.

3. Déjà fait.

4. Les points en question forment un triangle équilatéral avec le point d'affixe 1 sur le cercle trigo.

9. équation du secon degré

On désigne par P le plan complexe. Unité graphique : 2 cm.

1. Résoudre l'équation d'inconnue complexe z : $z^2-2z+4=0$. On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre. Donner le module et l'argument de chacun des nombres z_1, z_2, z_1^2, z_2^2. Ecrire sous forme algébrique z_1^2 et z_2^2.

2. On considère dans le plan les points $A(1+i\sqrt{3})$, $B(1-i\sqrt{3})$, $C(-2+2i\sqrt{3})$ et $D(-2-2i\sqrt{3})$.

a. Représenter les points A, B, C et D dans le plan P. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

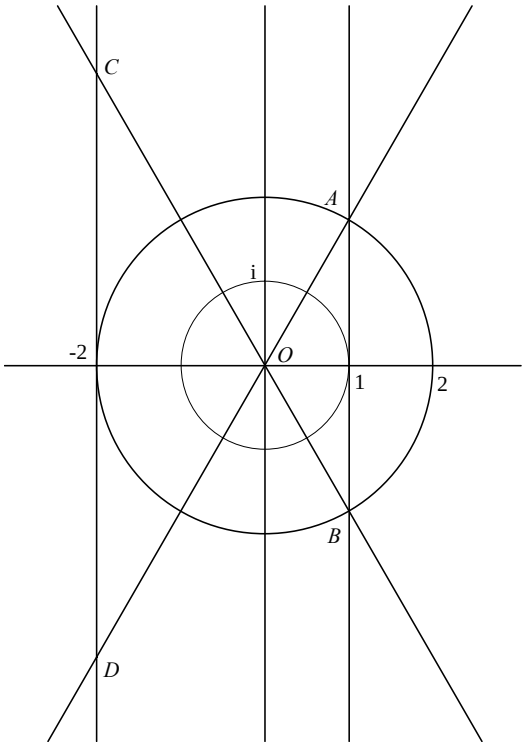
b. Montrer que les points O, A et D d'une part et les points O, B et C d'autre part sont alignés. Quel est le point d'intersection des diagonales de $ABCD$?

c. Quelles sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$? Montrer que les droites AB et AC sont perpendiculaires.

Correction

1. $z^2-2z+4=0$: les racines sont $z_1=1+i\sqrt{3}$ et $z_2=1-i\sqrt{3}$, dont le module est 2 et l'argument $\pi/3$ et $-\pi/3$. Pour les carrés on a $z_1^2=4e^{i\frac{2\pi}{3}}=-2+2i\sqrt{3}$ et $z_2^2=4e^{-i\frac{2\pi}{3}}=-2-2i\sqrt{3}$.

2. a. Comme on pouvait s'y attendre (enfin, des fois c'est différent…) les résultats du 1. se retrouvent comme affixes des points du 2. On fait la figure :



$ABCD$ est un trapèze isocèle (les droites (AB) et (CD) sont verticales donc parallèles ; les points A et B étant conjugués sont symétriques par rapport à (Ox), même chose pour C et D.

b. Avec les arguments c'est immédiat, sinon on utilise les vecteurs : par ex. $\overrightarrow{OC}=-2+2i\sqrt{3}=-2(1-i\sqrt{3})=-2\overrightarrow{OB}$. La symétrie par rapport à l'axe réel montre que les diagonales se coupent en O.

c. $\overrightarrow{AD}=-2-2i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}=-3-3i\sqrt{3}$ et $\overrightarrow{AC}=-2+2i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}=-3+i\sqrt{3}$. On peut faire le produit scalaire : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3\\-3\sqrt{3}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-3\\\sqrt{3}\end{pmatrix}=9-9=0$. C'est bon.

10. Polynôme

1. Développer $(1-\sqrt{2})^2$

2. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l' équation

$$z^2-(1+\sqrt{2})z+\sqrt{2}=0$$

3. Résoudre dans l'ensemble des complexes les équations $z+\frac{1}{z}=1$ puis $z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}$.

4. Soit $P(z)$ le polynôme de la variable complexe z défini par

$$P(z)=z^4-(1+\sqrt{2})z^3+(2+\sqrt{2})z^2-(1+\sqrt{2})z+1.$$

Vérifier que pour tout z non nul, on a

$$\frac{P(z)}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-(1+\sqrt{2})\left(z+\frac{1}{z}\right)+\sqrt{2}.$$

En déduire les solutions de l'équation $P(z)=0$.

Correction

1. $(1-\sqrt{2})^2 = 1-2\sqrt{2}+2 = 3-2\sqrt{2}$.

2. $z^2-(1+\sqrt{2})z+\sqrt{2}=0$:

$$\Delta = (1+\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} = 1+2\sqrt{2}+2-4\sqrt{2} = 1-2\sqrt{2}+2 = (1-\sqrt{2})^2$$

d'où $z_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}{2} = 1$ et $z_2 = \dfrac{1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

3. (1): $z+\dfrac{1}{z}=1 \Leftrightarrow z^2-z+1=0$, soit $z_1' = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_2' = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$;

(2): $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2} \Leftrightarrow z^2-\sqrt{2}z+1=0$ soit $z_1'' = \dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$, $z_2'' = \dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$.

4. $P(z) = z^4-(1+\sqrt{2})z^3+(2+\sqrt{2})z^2-(1+\sqrt{2})z+1$; on développe

$\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2-(1+\sqrt{2})\left(z+\dfrac{1}{z}\right)+\sqrt{2} = z^2+2z\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}-(1+\sqrt{2})z-(1+\sqrt{2})\dfrac{1}{z}+\sqrt{2}$,

on met au même dénominateur et on simplifie :

$$\frac{z^4+2z^2+1-(1+\sqrt{2})z^3-(1+\sqrt{2})z+\sqrt{2}z^2}{z^2} = \frac{z^4-(1+\sqrt{2})z^3+(2+\sqrt{2})z^2-(1+\sqrt{2})z+1}{z^2}$$

En faisant le changement de variable $z+\dfrac{1}{z}=Z$ on a l'équation $Z^2-(1+\sqrt{2})Z+\sqrt{2}=0$ qui a donc les solutions $Z_1=1, Z_2=\sqrt{2}$. Il reste à revenir sur z, ce qui donne les deux équations du 3. et donc les quatre solutions z_1', z_2', z_1'', z_2''.

11. Pentagonerégulier

On considère le nombre complexe $a = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. On note I, A, B, C, D les points du plan complexe d'affixes 1, a, a^2, a^3, a^4.

1. Vérifier que $a^5 = 1$.
2. Montrer que $IA = AB = BC = CD = DI$.
3. Vérifier que, pour tout z complexe : $z^5-1=(z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4)$.
4. En déduire que $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0$.
5. Montrer que $a^3 = \overline{a}^2$ et que $a^4 = \overline{a}$.
6. En déduire que $(a+\overline{a})^2+(a+\overline{a})-1=0$.
7. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
8. Calculer $(a+\overline{a})$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ |
9. Placer les points I, A, B, C et D dans le plan complexe (unité 4 cm).

Correction

1. $a^5 = e^{5.i\frac{2\pi}{5}} = e^{i2\pi} = 1$.

2. Les points I, A, B, C, D, sont les images successives les uns des autres par la rotation de centre O d'angle $\dfrac{2\pi}{5}$: I va sur A, A sur B, etc. On a donc égalité des distances (une rotation est une isométrie).

3. On développe et ça marche tout seul.

4. Comme $a^5 = 1$, a est une solution de l'équation $z^5=1$, soit de $(z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4)=0$, mais comme a ne vaut pas 1, a est solution de $1+z+z^2+z^3+z^4=0$ et est donc tel que $1+a+a^2+a^3+a^4=0$.

5. $a^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3 = e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $\overline{a}^2 = \left(e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right)^2 = e^{-i\frac{4\pi}{5}} = e^{i2\pi-i\frac{4\pi}{5}} = e^{i\frac{6\pi}{5}}$. Même chose pour $a^4 = \overline{a}$.

6. Utilisons $a^3 = \overline{a}^2$ et que $a^4 = \overline{a}$ dans $1+a+a^2+a^3+a^4=0 \Leftrightarrow 1+a+a^2+\overline{a}^2+\overline{a}=0$,
or $(a+\overline{a})^2 = a^2+2a\overline{a}+\overline{a}^2 = a^2+2+\overline{a}^2$, on retrouve bien la même relation.

7. Les solutions sont $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$, $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

8. $(a+\overline{a}) = e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{-i\frac{2\pi}{5}} = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$, donc en rempalçant dans $(a+\overline{a})^2+(a+\overline{a})-1=0$, on a $(2\cos\dfrac{2\pi}{5})^2+(2\cos\dfrac{2\pi}{5})-1=0 \Leftrightarrow 4\cos^2\dfrac{2\pi}{5}+2\cos\dfrac{2\pi}{5}-1=0$, $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ est donc une des deux solutions précédentes. Comme il est forcément positif ($\dfrac{2\pi}{5}=72°<90°$), il vaut $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.