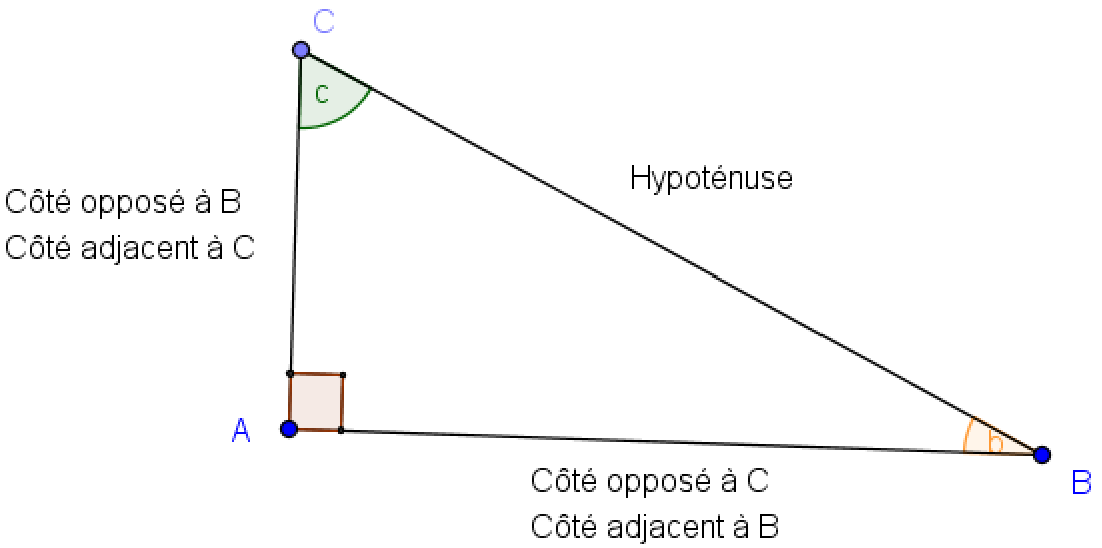
Trigonométrie dans le triangle rectangle

Guesmi.B

I Relations trigonométriques dans le triangle rectangle



Figure(1)

Si on s'intéresse à l'angle en B

- [AC] est le côté opposé à l'angle $\widehat{B}$
- [AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{B}$

Si on s'intéresse à l'angle enC:

- [AC] est _
- [AB] est _

B. Formules

Dans ABC un triangle rectangle en A, le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle aigu sont donnés par les formules suivantes:

$$\cos\widehat{B}=\frac{\text{côté adjacent à }\widehat{B}}{\text{hypoténuse}}=\frac{AB}{BC}$$

$$\sin\widehat{B}=\frac{\text{côté opposé à }\widehat{B}}{\text{hypoténuse}}=\frac{AC}{BC}$$

$$\tan\widehat{B}=\frac{\text{côté opposé à }\widehat{B}}{\text{côté adjacent à }\widehat{B}}=\frac{AC}{AB}$$

On a de même:

$\cos \widehat{C} = \dfrac{\text{côté adjacent à } \widehat{C}}{\text{hypoténuse}} = \_\_\_\_\_\_$

$\sin \widehat{C} = \dfrac{\text{côté opposé à}}{\text{hypoténuse}} = \_\_\_\_\_\_$

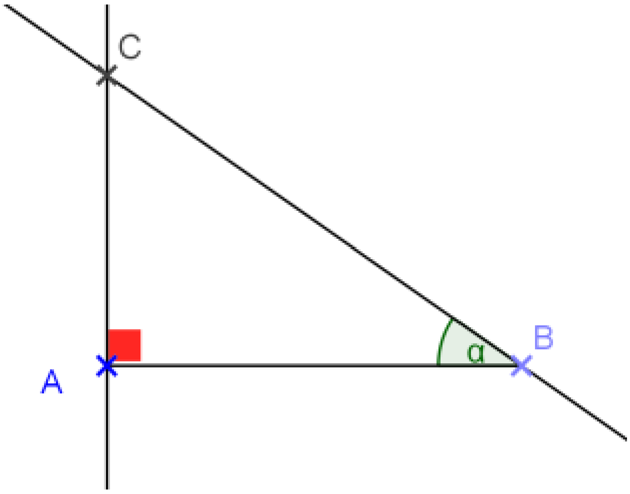
$\tan \widehat{C} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

Exemple

ABC est un triangle rectangle en A. On donne AB = 5 cm et $\widehat{ABC} = 35°$.

Construire la figure en vraie grandeur.

Déterminer la longueur AC, arrondie au dixième de centimètre.



Dans le triangle ABC, rectangle en A

$$\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB} \; d'où$$
$$AC = AB \times \tan \widehat{B} = 5 \tan 35 \approx 3{,}5\, cm$$

Relations entre sinus, cosinus et tangente

Relation fondamentale de la trigonométrie

Si a est un angle aigu d'un triangle rectangle:

$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ (1)

démonstration

dans le triangle rectangle ABC

$$\cos^2 a + \sin^2 a = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$$

or d'après le théorème de Pythagore dans ABC rectangle en A:

$AB^2+AC^2=BC^2$

donc

$$\cos^2 a+\sin^2 a=\frac{BC^2}{BC^2}=1$$

B Autre relation

si a est un angle aigu d'un triangle rectangle:

$$\frac{\sin a}{\cos a}=\tan a$$

démonstration:

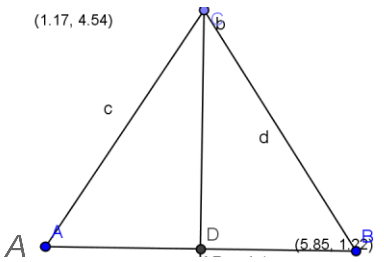
$$\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}}=\frac{AC}{BC}\times\frac{BC}{AB}=\frac{AC}{AB}=\tan a$$

III Valeurs particulières

En choisissant un triangle rectangle adapté aux différentes situations, vérifier (retrouver) dans le tableau les valeurs exactes suivantes.

Angle $\hat{a}$	30°	45°	60°
Sin $\hat{a}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos $\hat{a}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tan $\hat{a}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Demonstation de quelque resultat du tableau precedent



ABC est un triangle équilatéral de coté a(par exemple)

[AD] la hauteur issue de A

Donc $\widehat{ACD} = 30°$ *cos60°=*$\frac{AD}{AC}$ *or* $AD = \frac{1}{2}AC$ *d'où* $cos(60°) = \frac{1}{2}$

En utilisant la relation(1) on trouve sin60°=$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Vu que cos$\hat{C}$*= sin*$\hat{B}$ *figure (1)*

C'est-à-dire

Si deux angles sont complémentaires le sinus de l'un est le cosinus de l'autre

Donc on trouve alors $cos30° = sin60°$ *et que* $sin30° = cos60°$

Pour cos 45°=sin45° et on utilise la relation (1) on trouve

$$cos45° = sin45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$