Série N°2 $\quad$ $4^{\text{ème}}$ E.G

Exercice 1

1) Calculer les déterminants des matrices suivantes et préciser si elles sont inversibles :

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & 6\end{pmatrix}\quad ,\ B=\begin{pmatrix}3 & 9\\ -5 & -4\end{pmatrix}\quad ,\ C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 5 & 3 & 5\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -6 & 2 & -2\\ 0 & -3 & 7\end{pmatrix}$$

2) Déterminer la matrice inverse si elle existe : $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

3) Soit $P=\begin{pmatrix}-4 & -4 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

a) Calculer le déterminant de P, en déduire qu'elle est inversible

b) Montrer que $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -4\\ 2 & -4 & 10\\ 3 & -4 & 12\end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur IR* par $g(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

1) Etudier la continuité de g sur IR*
2) Etudier le sens de variation de g sur chacun des intervalles $]-\infty\,,0[$ et $]0,+\infty[$
3) Déterminer les images de ces intervalles par g

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=x^5+3x-2$

1) Justifier la continuité de f sur IR
2) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α appartenant à]0, 1[
3) Vérifier que $\dfrac{1}{2}<\alpha<\dfrac{3}{4}$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=x^3-3x-3$

1)a) Etudier le sens de variation de f sur IR.

b) En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α et que $2{,}1\le\alpha\le 2{,}11$

2) Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de g

b) Montrer que α est solution de l'équation $g(x)-3x=0$

c) Calculer les limites de g aux bornes de son domaine de définition

Exercice 5

1) Montrer que la fonction $f: x\mapsto\sqrt{x-2}+1$ détermine une bijection de son ensemble de définition vers un intervalle que l'on déterminera
2) Déterminer l'expression de f^{-1}
3) Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ dans le même repère

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur I = $[\dfrac{1}{4},+\infty[$ par $f(x)=2x^2-x+1$

1) Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera
2) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x\in J$