Relations métriques dans le triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en soit alors [AH] la hauteur issue de A donc

$sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$ $et\ cos\widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}$ donc

On remarque que si deux angle sont complémentaires alors le sinus de l'un est égal au

Cosinus de l'autre

En posant alors $x = \widehat{ABC}$; $y = \widehat{ACB}$; $z = \widehat{BAH}$ $et\ t = \widehat{CAH}$

Alors on a :x+y=90° (1)

y+t=90° (2)

x+z=90° (3)

t+z=90° (4)

les relations (1) et (2) donnent x=t

les relations (1) et (3) donnent y=z

alors $sinx = \frac{AC}{BC}$ dans le triangle ABC

$sinx = \frac{HC}{AC}$ dans le triangle AHC

D'où $\frac{AC}{BC} = \frac{HC}{AC}$ $signifie$ $AC^2 = HC.BC$ (a)

De même on montre que $AB^2 = HB.BC$ (b)

Consequence

1) $$AB^2 + AC^2 = BC(HB + HC)$$
$$= BC.BC$$
$$= BC^2$$ (théorème de Pythagore)

2)on a :$cosx = \frac{AB}{BC}$ (triangleABC)

$cosx = \frac{AH}{AC}$ (triangle AHC)

D'ou $\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC}$ donc AB.AC=AH.BC (c)

3)$tanx = \frac{AH}{BH}$ (triangle ABH)

$tanx = \frac{CH}{AH}$ (triangleAHC)

Guesmi.B

D'ou $\frac{HA}{HB} = \frac{HC}{HA}$ equivaut $HA^2 = HB.BC$ (d)

4) $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{AB^2+AC^2}{AB^2.AC^2}$

$= \frac{BC^2}{(HB.BC).(HC.BC)}$

$= \frac{1}{HB.HC}$

$= \frac{1}{AH^2}$

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2} \qquad \text{(e)}$$

APPLICATION

On donne deux reels positifs a et b

Construire $\sqrt{ab}$

Soit $x = \sqrt{ab}$ signifie $x^2 = ab$ en remarquant (d)

Posons alors HB=a et HC=b donc HA^2=a.b donc x=HA

Donc on construit le cercle de diamètre [BC] avec BC=a+b

On place sur [BC] le point H tel que HB=a

La perpendiculaire à (BC) passant par H coupe le demi cercle en un point A

Le triangle ABC est rectangle en A

D'où HA=$\sqrt{ab}$

Remarque si par exemple a=1 ou b=1

On obtient $HA = \sqrt{a} = \sqrt{b}$

trigonometrie dans le triangle rectangle