

Probabilités ; Géométrie dans l'espace ; Suites réelles ; Equations différentielles du premier ordre ; Fonction exponentielle.

Exercice n°1 : ©

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

1) Dans le plan complexe, on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et i.

L'ensemble des points M d'affixe z telsque $\frac{i-z}{1-z} \in \mathbb{R}^*$ est :

- a) La droite (AB) privée des points A et B.
- b) Le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B .
- c) Le segment [AB] privé des points A et B.

2) Si A et B sont deux événements indépendants d'un même univers tels que l'on ait :

$p(A) = 0.1$ et $p(B) = 0.5$ alors $p(A \cup B) =$

- a) 0.05 ; b) 0.55 ; c) 0.6

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (C) est la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1 + \ln x}$. On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de la courbe constitué par les points de (C) d'abscisses comprises entre 1 et e. Le volume de \mathcal{V} du solide ainsi engendré est :

- a) π ; b) πe ; c) $\pi(e - 1)$.

Exercice n°2 : ©

La durée de vie (en années) d'un appareil électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

- 1) a) Déterminer λ pour que $p(X \geq 8) = 0.28$
b) Calculer la probabilité pour que l'appareil ait une durée de vie inférieure ou égale à trois mois.
c) Déterminer T tel que $p(X \leq T) = 4p(X \geq T)$.
- 2) Sachant qu'un appareil a déjà dépassé six ans, quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne quatre ans de plus.
- 3) Une personne achète n appareils électroniques identiques ($n \in \mathbb{N}^*$) du modèle précédent. On suppose que la durée de vie d'un appareil est indépendante de celle des autres.

a) Exprimer, en fonction de n , la probabilité p_n qu'au moins un appareil fonctionne plus que 8 ans ?

b) Déterminer n pour que $p_n \geq 0.998$.

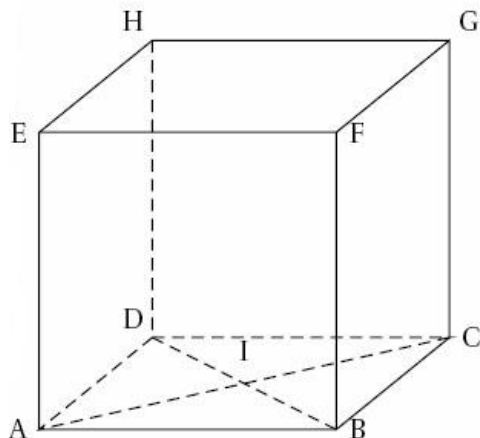
Exercice n°3 : ©

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct.

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.

Son arête a pour longueur 1.

Le centre de la face ABCD est le point I.



Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

1) a) Déterminer $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$.

b) En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que : $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}) \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$

c) Déterminer l'ensemble (F) des points M de l'espace tels que : $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

2) On appelle P le barycentre du système $\{(A, 2); (C, -1)\}$.

a) Montrer que P est le symétrique de C par rapport à A.

b) Soit (G) l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$

Déterminer l'ensemble (G).

Montrer que le point A appartient à l'ensemble (G).

Exercice n°4 : ©

On considère la suite réelle (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} \end{cases}$$

1. a) Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} , $1 < u_n < 2$.

b) Montrer que (u_n) est croissante.

c) En déduire que (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

2. Soit (v_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N} par : $v_n = \ln(u_n - 1)$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

c) Retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice n°5 : ©

A) On donne deux équations différentielles : $(E_1) : y' = 3y$ et $(E_2) : y' = 2y$.

1) Donner les solutions de l'équation (E_1) et celles de l'équation (E_2) .

2) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ où f_1 désigne une solution de l'équation différentielle (E_1) et f_2 désigne une solution de l'équation différentielle (E_2) .

Déterminer $f(x)$ sachant que $f(0) = -2$ et $f'(0) = -3$.

B) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^{3x} - 3e^{2x}$.

On désigne par \mathcal{C} la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe \mathcal{C} .

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[\ln 2, +\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[\ln 2, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

b) Tracer \mathcal{C}' la courbe de g^{-1} dans le même repère.

c) Calculer l'aire A du domaine limité par la courbe \mathcal{C}' et les droites d'équations $y = \ln 2$, $x = -4$ et $x = 0$.

Exercice n°1 :

1) $\frac{i-z}{1-z} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{z_{\overline{MB}}}{z_{\overline{MA}}} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \overline{MB}$ et \overline{MA} sont colinéaires, avec $M \neq B$ et $M \neq A$

$\Leftrightarrow M \in (AB) \setminus \{A, B\}$ donc c'est **a)**

2) A et B sont deux événements indépendants $\Rightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

$\Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A) \times p(B) = 0.1 + 0.5 - 0.05 = 0.55$

Donc c'est **b)**

3) $\int_1^e \pi(1 + \ln x) dx = \pi [x + x \ln x - x]_1^e = \pi e$ donc c'est **b)**

Exercice n°2 :

1) a) $p(X \geq 8) = 0.28 \Leftrightarrow e^{-8\lambda} = 0.28 \Leftrightarrow -8\lambda = \ln(0.28) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0.28)}{8} = 0.159$

b) 3 mois en années est $\frac{1}{4}$ année

$$P(X \leq \frac{1}{4}) = 1 - e^{-\frac{1}{4}\lambda} = 1 - e^{-\frac{0.159}{4}} = 0.039$$

c) $p(X \leq T) = 4p(X \geq T)$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda T} = 4e^{-\lambda T} \Leftrightarrow e^{-\lambda T} = \frac{1}{5} = 0.2 \Leftrightarrow -\lambda T = \ln(0.2) \Leftrightarrow T = -\frac{\ln(0.2)}{\lambda} = -\frac{\ln(0.2)}{0.159} \approx 10,12$$

2) $p(X \geq 10 | X \geq 6) = \frac{p((X \geq 10) \cap (X \geq 6))}{p(X \geq 6)} = \frac{p(X \geq 10)}{p(X \geq 6)} = \frac{e^{-10\lambda}}{e^{-6\lambda}} = e^{-4\lambda} = e^{-4 \times 0.159} \approx 0,529$

3) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'appareils ayant une durée de vie $X \geq 8$.

Y suit une loi binomiale de paramètres n et $p = p(X \geq 8) = 0.28$

a) $p_n = p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - (0,72)^n$.

b) $p_n \geq 0.998 \Leftrightarrow 1 - (0,72)^n \geq 0,998 \Leftrightarrow (0,72)^n \leq 0,002 \Leftrightarrow n \ln(0,72) \leq \ln(0,002)$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0.002)}{\ln(0.72)} \approx 18.91 \Leftrightarrow n \text{ est un entier supérieur ou égal à } 19.$$

Exercice n°3 :

- 1) a) $\overline{BC} \wedge \overline{BA} = \overline{BF}$
b) $M \in (E) \Leftrightarrow (\overline{BC} \wedge \overline{BA}) \wedge \overline{BM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{BF} \wedge \overline{BM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{BF}$ et \overline{BM} sont colinéaires $\Leftrightarrow M \in (BF)$.
c) $M \in (F) \Leftrightarrow (\overline{BC} \wedge \overline{BA}) \cdot \overline{BM} = 0 \Leftrightarrow \overline{BF} \cdot \overline{BM} = 0 \Leftrightarrow M$ appartient au plan passant par B et ayant pour vecteur normal $\overline{BF} \Leftrightarrow M \in (ABC)$.
- 2) a) $2\overline{PA} - \overline{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{PA} - \overline{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{PA} = \overline{AC} \Leftrightarrow A$ est le milieu de $[PC] \Leftrightarrow P$ est le symétrique de C par rapport à A.
b) $M \in (G) \Leftrightarrow \|2\overline{MA} - \overline{MC}\| = \|-\overline{MA} + 2\overline{MB} - \overline{MC}\| \Leftrightarrow$
 $\|\overline{MP}\| = \|2(\overline{MB} - \overline{MI})\| \Leftrightarrow \|\overline{MP}\| = 2\|\overline{IB}\| \Leftrightarrow PM = BD = AC = \sqrt{2} \Leftrightarrow M \in S_{(P, \sqrt{2})}$: la sphère de centre P et de rayon $\sqrt{2}$.
c) $PA = AC = \sqrt{2} \Rightarrow A \in (G)$.

Exercice n°4 :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1) a) Montrons par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} , $1 < u_n < 2$.

➡ Pour $n = 0$, $1 < u_0 = \frac{3}{2} < 2$

➡ Pour $n \geq 0$, supposons que $1 < u_n < 2$ et montrons que $1 < u_{n+1} < 2$

En effet :

$$1 < u_n < 2 \Rightarrow 0 < u_n - 1 < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{u_n - 1} < 1 \Rightarrow 1 < 1 + \sqrt{u_n - 1} < 2 \Rightarrow 1 < u_{n+1} < 2$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$

b) $u_{n+1} - u_n = 1 + \sqrt{u_n - 1} - u_n = \sqrt{u_n - 1} - (u_n - 1) = \sqrt{u_n - 1}(1 - \sqrt{u_n - 1})$

$$\text{Or } 1 < u_n < 2 \Rightarrow 0 < u_n - 1 < 1 \Rightarrow \sqrt{u_n - 1} < 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{u_n - 1} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \underbrace{\sqrt{u_n - 1}}_{>0} \underbrace{(1 - \sqrt{u_n - 1})}_{>0} > 0$$

$\Rightarrow (u_n)$ est croissante.

- c) (u_n) est croissante et majorée par 2 $\Rightarrow (u_n)$ est convergente vers un réel $\ell \in [1, 2]$

$$\begin{cases} (u_n) \text{ converge vers } \ell \in [1, 2] \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f(x) = 1 + \sqrt{x-1} \quad \forall x \in [1, +\infty[\\ f \text{ est continue sur } [1, +\infty[\text{ donc en } \ell \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(\ell) = \ell \Leftrightarrow 1 + \sqrt{\ell-1} = \ell \Leftrightarrow \sqrt{\ell-1}(1 - \sqrt{\ell-1}) = 0 \Leftrightarrow \ell = 1 \text{ ou } \ell = 2$$

$$\text{Or } u_n \geq u_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow \ell \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \ell = 2.$$

$$2) v_n = \ln(u_n - 1)$$

$$a) v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln(\sqrt{u_n - 1}) = \frac{1}{2} \ln(u_n - 1) = \frac{1}{2} v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{2}.$$

$$b) \frac{1}{2} \in]-1, 1[\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

$$c) u_n = 1 + e^{v_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \underbrace{e^{v_n}}_{e^0=1} = 2$$

Exercice n°5 :

$$A) 1) (E_1): y' = 3y \Leftrightarrow y(x) = ke^{3x}$$

$$(E_2): y' = 2y \Leftrightarrow y(x) = k'e^{2x}$$

$$2) f(x) = f_1(x) + f_2(x) = ke^{3x} + k'e^{2x}$$

$$f(0) = -2 \Leftrightarrow k + k' = -2$$

$$f'(0) = -3 \Leftrightarrow 3k + 2k' = -3$$

$$\begin{cases} k + k' = -2 \\ 3k + 2k' = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k + 3k' = -6 \\ 3k + 2k' = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k' = -3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = e^{3x} - 3e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$B) f(x) = e^{3x} - 3e^{2x}$$

$$1) f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et on a : } f'(x) = 3e^{3x} - 6e^{2x} = 3e^{2x}(e^x - 2)$$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0		$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{e^{3x}}_0 - 3 \underbrace{e^{2x}}_0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{e^{2x}}_{+\infty} \underbrace{(e^x - 3)}_{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} \underbrace{(e^x - 3)}_{+\infty} = +\infty \Rightarrow \mathcal{C} \text{ admet une branche parabolique de direction celle de } (O, \vec{j})$$

au voisinage de $+\infty$.

2) a) g est continue et strictement croissante sur $[\ln 2, +\infty[\Rightarrow g$ réalise une bijection de $[\ln 2, +\infty[$ sur $I = [-4, +\infty[$.

b) $\mathcal{C}' = S_{\Delta}(\mathcal{C})$ où $\Delta : y = x$.

c) Par raison de symétrie par rapport à Δ , on a :

$$A = \int_{\ln 2}^{\ln 3} |f(x)| dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} (3e^{2x} - e^{3x}) dx = \left[\frac{3}{2} e^{2x} - \frac{1}{3} e^{3x} \right]_{\ln 2}^{\ln 3} = \left(\frac{27}{2} - \frac{27}{3} \right) - \left(6 - \frac{8}{3} \right) = \frac{7}{6} U.A$$

