

## Thèmes abordés :

Complexes ; Statistiques ; Géométrie dans l'espace ; Fonction exponentielle ; Equations différentielles

## Exercice n°1 :

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ .

1. Le point  $M$  est situé sur le cercle de centre  $A(-2 ; 5)$  et de rayon  $\sqrt{3}$ . Son affixe  $z$  vérifie :

a.  $|z-2+5i|^2 = 3$  ;                      b.  $|z+2-5i|^2 = 3$  ;                      c.  $|z-2+5i| = 3$ .

2. On considère trois points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a, b$  et  $c$ , deux à deux distincts et tels que le triangle  $ABC$  n'est pas équilatéral. Le point  $M$  est un point dont l'affixe  $z$  est telle que les nombres complexes  $\frac{z-b}{c-a}$  et  $\frac{z-c}{b-a}$  sont imaginaires purs.

- a.  $M$  est le centre du cercle circonscrit au triangle  $ABC$  ;
- b.  $M$  appartient aux cercles de diamètres respectifs  $[AC]$  et  $[AD]$  ;
- c.  $M$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ .

3. Soit  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $1+i$  et  $5+4i$ , et  $C$  un point du cercle de diamètre  $[AB]$ . On appelle  $G$  l'isobarycentre des points  $A, B$  et  $C$  et on note  $z_G$  son affixe.

a.  $|z_G - 3 - 2,5i| = \frac{5}{6}$  ;    b.  $z_G - (1+i) = \frac{1}{3}(4+3i)$  ;    c.  $z_G - (3+2,5i) = \frac{1}{3}(4+3i)$ .

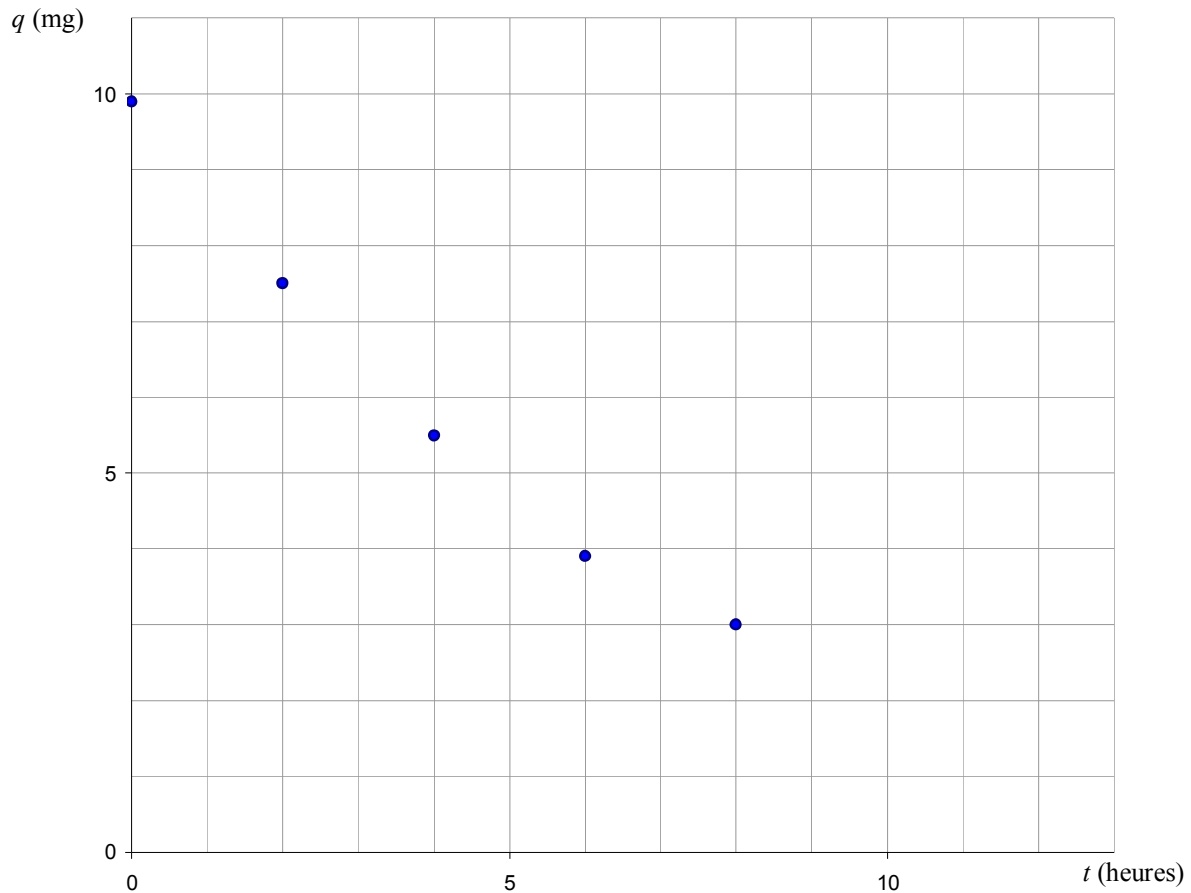
## Exercice n°2 :

Un médicament est injecté par voie intraveineuse. Dans les heures qui suivent, la substance est éliminée par les reins. La quantité  $q_i$  présente dans le sang ( $q_i$  en milligrammes) à l'instant  $t_i$  ( $t_i$ , en heures) a été mesurée par des prises de sang toutes les deux heures.

$t_i$ (heures)	0	2	4	6	8
$q_i$ (mg)	9,9	7,5	5,5	3,9	3

## **PARTIE A - Modélisation par une fonction affine**

Le nuage de points associé à la série  $(t_i ; q_i)$  est représenté dans le repère orthogonal ci-dessous.



- Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite D d'ajustement affine de  $q$  en  $t$  par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à  $10^{-2}$ ) ; tracer la droite D sur la figure ci-dessus.
- En supposant que ce modèle reste valable pendant 12 heures, quelle estimation obtient-on de la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures ? Qu'en pensez-vous ?

### PARTIE B - Recherche d'un modèle mieux adapté

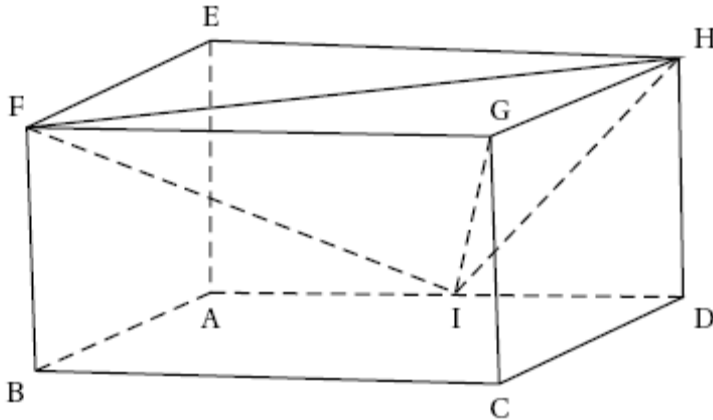
- On pose  $y_i = \ln q_i$ . Recopier et compléter le tableau ci-dessous (valeurs arrondies au centième) :

$t_i$	0	2	4	6	8
$y_i$					

- Déterminer à l'aide de la calculatrice une équation de la droite d'ajustement affine de  $y$  en  $t$  par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis au centième).
- Montrer que l'expression de  $q$  en fonction de  $t$  obtenue à partir de cet ajustement est de la forme  $q = ae^{-bt}$  où  $a$  est arrondi à l'unité et  $b$  au centième.
- Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 15]$  par :  $f(t) = 10e^{-0,15t}$ .  
Tracer sa courbe représentative  $C$  sur la figure de la partie A.
- On suppose que ce nouveau modèle reste valable pendant 12 heures. Calculer à  $10^{-1}$  près la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures.  
Placer le point correspondant sur le graphique.

### Exercice n°3 :

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un parallélépipède rectangle ABCDEFGH tel que :  $AB = 1$ ,  $AD = 2$  et  $AE = 1$ .



On appelle I le milieu de [AD].

L'espace est muni du repère orthonormé direct  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

- Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G et H.
- (a) Montrer que le volume V du tétraèdre GFHI est égal à  $\frac{1}{3}$ .  
(b) Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.  
En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH).
- Soit le vecteur  $\vec{n}$  de coordonnées (2, 1, -1).  
(a) Montrer que  $\vec{n}$  est normal au plan (FIH).  
(b) En déduire une équation du plan (FIH).  
(c) Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH).
- (a) La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?  
(b) Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.  
(c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).
- Soit  $\Gamma$  la sphère de centre G passant par K.  
Quelle est la nature de l'intersection de  $\Gamma$  et du plan (FIH) ? préciser les éléments caractérisant cette intersection.

### Exercice n°4 :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$ . On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

## Partie A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x - x - 1$ .

1. Etudier les variations de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ . En déduire le signe de  $g$ .
2. Justifier que pour tout  $x$ ,  $e^x - x > 0$ .

## Partie B

1. a. Calculer les limites de la fonction  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .  
b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. a. Calculer  $f'(x)$ ,  $f'$  désignant la fonction dérivée de  $f$ .  
b. Etudier le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variation.
3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.  
b. A l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).
4. Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe (C).

## Exercice n°5 :

1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur  $\mathbb{R}$ , de l'équation différentielle suivante :  
(E) :  $y'' + y = 0$ .

2. Soit  $g$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .

On définit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^*$  dans  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$ .

Exprimer  $f''(x)$  à l'aide de  $g''\left(\frac{1}{x}\right)$  et de  $x$ .

3. On considère l'équation différentielle (E') :  $y'' = -\frac{1}{x^4}y$ .

Montrer que la fonction  $g$  est solution de (E'), si et seulement si, la fonction  $f$  définie pour tout réel non nul  $x$  par  $f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$  est solution de (E).

4. En déduire toutes les solutions de (E') définies sur chacun des intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .

5. Soit  $g$  une solution de l'équation (E') définie sur  $]0, +\infty[$ .

(a) Déduire des questions précédentes une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^4}g(x)$

(b) Calculer la valeur de l'intégrale  $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$