Probleme1 Guesmi.B

FONCTION DEFINIE PAR INTEGRALE

Soit la fonction F(x)=$\int_0^1 \frac{1}{1+(tx)^2}dt$

1)a) montrer que F est définie sur IR

b)montrer que F est paire et déterminer F(0)

2) on pose G(x)=$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+(tx)^2}dt$ et H(x)=$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1+(tx)^2}dt$

a) montrer que G et H sont définies sur IR et que G(0)= $\frac{1}{2}$

b) montrer que $\forall x \in IR$; $0 < G(x) \leq \frac{1}{2}$

c) montrer que $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^2}dt = 1$

d) montrer que $\forall x \in IR^*$; $0 \leq H(x) \leq \frac{1}{x^2}$

3) montrer que F est décroissante sur [0,+∞[et qu'elle est croissante sur]-∞,0]

4) donner le tableau de variation de F(on ne demande pas de calculer la limite de F en +∞)

5) soit K(x)=$\frac{F(x)-1}{x}$

a) montrer que $|K(x)| \leq |x|F(x); en\ deduire\ \lim_{x\to 0} K(x)$

b)montrer que F est dérivable en 0 et écrire l'équation de la tangente au point A(0,1)

CORRECTION

1)a) soit x∈IR la fonction t→ $\frac{1}{1+t^2x^2}$ est continue sur IR donc F(x) existe $\forall x \in IR$

b) $F(-x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2(-x)^2}dt = F(x)$, $\forall x \in IR$

$$F(0) = \int_0^1 1dt = 1$$

2)a) la fonction t→$\frac{1}{1+t^2x^2}$ est continue sur IR en particulier sur [0,1/2] et sur [1/2 ;1]

Donc G(x) et H(x) existent $\forall x \in IR$ G(0)=$\int_0^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2}$

b) on a $\frac{1}{1+t^2x^2} > 0$ donc G(x)>0 et puisque $1 + (tx)^2 \geq 1$ alors $\frac{1}{1+(tx)^2} \leq 1$ donc 0<G(x)≤ 1

c) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t^2} dt = 1$ et $1 + (tx)^2 \geq 1 \Leftrightarrow 0 \leq G(x) \leq \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{(tx)^2} dt = \frac{1}{x^2} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{x^2}$

d'où $0 \leq H(x) \leq \frac{1}{x^2}$

d) $\forall x \geq 0 \; et \; y \geq 0 \;\; et \; x \leq y \;\; \Leftrightarrow x^2 \leq y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2t^2} \geq \frac{1}{1+t^2y^2}$ donc F(x)$\geq F(y)$

alors F est décroissante sur [0 ;+∞[

4)on démontre de la même façon que F est croissante sur]-∞ ;0]

4) soit l=$\lim_{x\to+\infty} F(x)$ le tableau se déduit d'âpres 3)d)

on a : $|K(x)| = \frac{1}{x}\left|\int_0^1 \frac{1}{1+t^2x^2} dt - \int_0^1 dt\right| = \frac{1}{|x|}\int_0^1 \frac{t^2x^2}{1+t^2x^2} dt$

Or $t \leq 1 \; donc \; t^2 \leq 1$ d'ou en multipliant par x^2 on aura

$|K(x)| \leq |x| \int_0^1 \frac{1}{1+t^2x^2} dt \;\Leftrightarrow\; |K(x)| \leq |x|F(x)$ (2)

On a : $1 + t^2x^2 \geq 1$ donc $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2x^2} dt \leq 1$ d'où d'apres (2) $|K(x)| \leq |x|$ d'où $\lim_{x\to0} K(x) = 0$

b) on a :$\lim_{x\to0} K(x) = \lim_{x\to0} \frac{F(x)-1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = 0 = F'(0)$

donc F est dérivable en 0 et F'(0)=0

l'équation de la tangente T en A(0 ;1) est T :y=1