PROBLEME3

Guesmi.B

Soit l'équation différentielle

Y''-y'+3y=0 (E)

1)résoudre l'équation (E) et préciser la solution f(0)=1 et f'(0)=0

2) soit l'équation y''-y'+3y= cosx+sinx (F)

a) trouver une solution particulière de (F)de la forme y=acosx+bsinx

b)trouver alors les solutions de (E)

CORRECTION

L'équation caractéristique de (E)est r^2-r+3=0 (1)

Δ=b^2-4ac= - 11

Δ<0 donc les solutions de (1) sont $r_1 = \frac{1+i\sqrt{11}}{2}$ et $r_2 = \frac{1-i\sqrt{11}}{2}$

D'où les solutions de l'équation différentielle (E)

Sont de la forme f(x)=$e^{\frac{1}{2}x}(Acos\frac{\sqrt{11}}{2}x + Bsin\frac{\sqrt{11}}{2}x)$

f(0)=1 donc A=1 et f'(0)=0⇔$\frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{11}}{2} = 0 donc\ B = \frac{-1}{\sqrt{11}}$

et alors $f(x) = e^{\frac{x}{2}}(cos\frac{\sqrt{11}}{2}x - \frac{\sqrt{11}}{11}sin\frac{\sqrt{11}}{2}x)$

b) y=acosx+bsinx

y'=-asinx+bcosx

y''=-acosx –bsinx

y est solution de (F) ⇔ $(2a-b)cosx + (a+2b)sinx = cosx + sinx$

en particulier pour x=0 et x=$\frac{\pi}{2}$ on a :$\begin{cases} 2a-b=1 \\ a+2b=1 \end{cases} donc\ a = \frac{3}{5}\ et\ b = \frac{1}{5}$

donc la solution particulière de (F) est $y = \frac{2}{5}cosx + \frac{1}{5}sinx$

b)l'équation homogène associée (F) est

$y = \frac{1}{5}(3cosx + sinx) + e^{\frac{1}{2}x}(Acos\frac{\sqrt{11}}{2}x + Bsin\frac{\sqrt{11}}{2}x)$; A et B sont deux réels