PROBLEME2

Guesmi.B

1)montrer que $\forall x \in [-1,1] on\ a: |e^x - 1| \leq |x|e^{|x|}$

2)soit $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $\varphi(x) = \int_0^{tgx} \frac{1}{1+t^2} dt$ (a)

Montrer que $\varphi\ est\ derivable\ sur\ ]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et déterminer $\varphi'(x)$

En déduire $\varphi(x) et\ \varphi(\frac{\pi}{4})$

3)soit x$\in IR$ et $F(x) = \int_{-1}^{1} \frac{e^{tx}}{1+t^2} dt$

a)montrer que F est définie sur IR et calculer F(0)

b)montrer que pour tout x∈[-1 ;1] on a :$\left|F(x) - \frac{\pi}{4}\right| \leq |x| eLog2$

c) en déduire F est continue en 0

CORRECTION

1) Soit la fonction $f(x) = e^x - 1$
2) Soit x>0 , f est continue sur [0 ;x] dérivable sur]0 ;x[donc d'après le théorème des accroissement fini

$\exists c \in]0,x[\ \ tel\ \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c) \Leftrightarrow |e^x - 1| = |x|e^c$ or $c < |x|$

$donc\ |e^x - 1| \leq |x|e^{|x|}$ (1)

Soit x<0 donc –x>0 et par suite d'après (1) on a : $|e^{-x} - 1| \leq |x|e^{|x|}$ donc

$|e^x - 1| \leq |x|e^x e^{|x|} \leq |x|e^{|x|}$ $(e^x \leq e^0 = 1)$

2)la fonction t→$\frac{1}{1+t^2}$ est continue sur IR donc admet une primitive

donc g(x)=$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ est dérivable sur IR

alors $\varphi(x) = (gotg)(x)$

donc $\varphi\ est\ derivable\ sur\ ]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ puisqu'elle est composée de fonctions dérivables

d'où $\varphi'(x) = \left(1 + tg^2(x)\right)\left(\frac{1}{1+tg^2(x)}\right) = 1$

alors $\varphi(x) = x + k$; $k \in IR$ (2)

en prenant x=0 dans (2) on aura $\varphi(0) = 0 + k \; et \; dans \; (a) alors \; k = 0$

donc $\varphi(x) = x$; $donc \; \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

3)a)la fonction $t \to \frac{e^{tx}}{1+t^2}$ est continue sur IR en particulier sur]-1 ;1[

Et par suite F(x) existe

$F(0) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2} dt$

$\frac{1}{1+t^2}$ est paire donc $F(0) = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{1+t^2} dt = 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

b)$\left|F(x) - \frac{\pi}{2}\right| = \left|F(x) - \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2} dt\right| = \left|\int_{-1}^{1} \frac{e^{tx}-1}{1+t^2} dt\right| \leq \int_{-1}^{1} \frac{|e^{tx}-1|}{1+t^2} dt$

Or $|t| \leq 1$et $|x| \leq 1 \; donc \; |tx| \leq 1$

En remplaçant dans (1) on aura $|e^{tx} - 1| \leq |tx| e^{|tx|}$donc

$\left|F(x) - \frac{\pi}{2}\right| \leq \int_{-1}^{1} \frac{|t||x|e^{|tx|}}{1+t^2} dt \; or \; |tx| \leq 1$ donc $e^{|tx|} \leq e$

Donc $\left|F(x) - \frac{\pi}{2}\right| \leq |x| e \int_{-1}^{1} \frac{|t|}{1+t^2} dt$

$\int_{-1}^{1} \frac{|t|}{1+t^2} dt = 2\int_{0}^{1} \frac{t}{1+t^2} dt = Log2$

D'où $\left|F(x) - \frac{\pi}{2}\right| \leq |x| eLog2$

c)Puisque $0 \leq \left|F(x) - \frac{\pi}{2}\right| \leq |x| eLog2 \; et \; que \; \lim_{x\to 0} |x| Log2 = 0$

Donc $\lim_{x\to 0} F(x) = \frac{\pi}{2} = F(0)$ donc F est continue en 0