Nombres complexes

Définition

L'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres de la forme z = a + biou a et b sont des réels quelconques et i un nouveau nombre tel que i^2= -1.
Le nombre a est appelé partie réelle de z et noté parfois Re(z)
Le nombre b est appelé partie imaginaire de z et noté parfois Im(z).
La forme z = a + bi est appelée [forme algébrique]() de z.
Si z = bi ou b est un réel, le nombre complexe z est appelé un imaginaire pur,
si z = a ou a est un réel, le nombre complexe est réel.

On admet que l'on peut définir sur cette ensemble $\mathbb{C}$, une addition et une multiplication pour lesquelles les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$, en tenant compte que i^2 = -1

Forme algébrique :

On appelle forme algébrique d'un nombre complexe la forme $z = a + bi$ ou a et b sont deux réels (on rappelle que i est tel que i^2 = -1)

Exemples : 2 + 2i, 3i , -5i sont sous forme algébrique.

Les nombres suivants ont été mis sous la forme algébrique.

$$(1+2i)^2 = 1+4i+4i^2 = 1+4i+4\times(-1) = 1+4i-4 = -3+4i$$

$$(2+3i)(2-3i) = 4-9i^2 = 4-9\times(-1) = 4+9 = 13$$

$$(2i)^3 = 8i^3 = 8i\times i^2 = 8i\times(-1) = -8i$$

$$(2-i\sqrt{3})^2 = 4-4i\sqrt{3}+3i^2 = 4-4i\sqrt{3}+3\times(-1) = 4-4i\sqrt{3}-3 = 1-4i\sqrt{3}$$

$$(2+i)(3-2i) = 6-4i+3i-2i^2 = 6-i-2\times(-1) = 6-i+2 = 8-i$$

$$\frac{1}{2i} = \frac{1\times i}{2i\times i} = \frac{i}{2i^2} = \frac{i}{2\times(-1)} = -\frac{1}{2}i$$

$$\frac{3+i}{2-i} = \frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+3i+2i+i^2}{4-i^2} = \frac{6+5i-1}{4-(-1)} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$$

Module d'un nombre complexe

Définition :
Soit $z = a + b\,i$ (où a et b sont deux nombres réels) un nombre complexe sous la forme algébrique , on appelle module du nombre complexe z , le nombre réel défini par :

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Remarques :
- le module d'un nombre complexe est un réel positif.
- deux nombres complexes distincts peuvent avoir le même module.
- le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue, c'est pour cela qu'on conserve la notation avec les deux barres " | x | "

Propriétés sur les modules :

z et z' sont deux nombres complexes.

$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

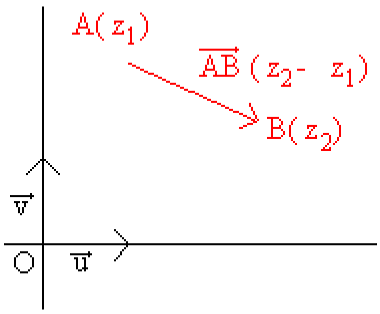
$|z^n| = |z|^n$

si $z' \neq 0$ alors $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Remarque : si le nombre z est réel alors son module est égal à sa valeur absolue.

Si z_1 et z_2 sont les deux affixes de 2 points A et B alors la distance AB est égale au module de $z_2 - z_1$:



- AB $=|z_2 - z_1|$

et le vecteur $\vec{AB}$ a pour affixe $z_2 - z_1$:

- $\vec{AB}$ $(z_2 - z_1)$

Exemples de calculs :

$$|1+3i| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$|2-3i| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\left|\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

$$|-3| = \sqrt{(-3)^2+0^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ on retrouve bien la valeur absolue}$$

$$|-5i| = \sqrt{0^2+(-5)^2} = \sqrt{0+25} = \sqrt{25} = 5$$

$$\left|1+\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})\right| = \sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2+(1-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}+3}$$

$$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

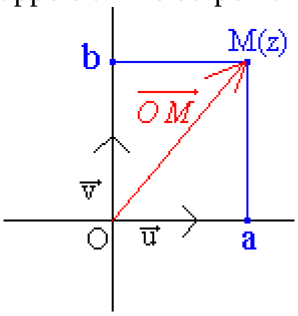
Conjugué d'un nombre complexe

Z est un nombre complexe/ z=a+ib ; a et b sont deux réels on appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\bar{z}$=a-ib

Nombres complexes et géométrie

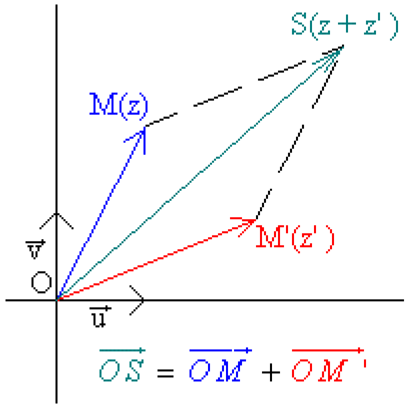
- **Affixe et image**

Soit P le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$
Le point M, de coordonnées (a ; b) , est appelé image du nombre complexe $z = a + bi$, et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est l'image vectorielle de z. On le note parfois M(z) l'image de z. Le nombre z est appelé affixe du point M(x ; y) et aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$



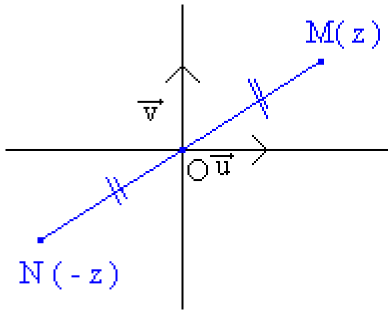
Addition de deux nombres complexes

Soient z et z' deux nombres complexes et s = z + z' leurs sommes.
L'image vectorielle de s est la somme vectorielle des image vectorielle de z et z'.



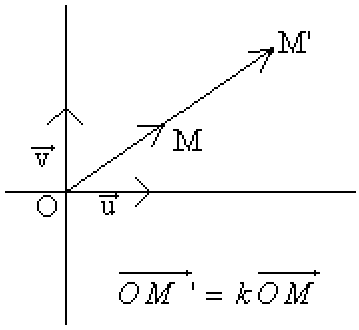
Opposé d'un nombre complexe

Deux nombres complexes opposés z et -z ont des images symétrique par rapport à l'origine O du repère.



Multiplication d'un nombre complexe par un réel

Si z et z' sont deux nombres complexes et k un réel non nul tels que z' = k z sont les affixes de deux points M et M' , le point M ' est l'image du point M par l'homothétie de centre O est de rapport k.



Argument d'un nombre complexe

Définition :
Soit *z* = *a* + *b i* (où *a et b* sont deux nombres réels non nuls tous deux) un nombre complexe non nul sous la forme algébrique , on appelle argument du nombre complexe *z* , le nombre réel θ défini par :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

où | *z* | est le module du nombre complexe *z* .
Remarques :
- le nombre complexe 0 n'a pas d'argument.
- un nombre complexe non nul admet plusieurs arguments, c'est pour cela que dans un énoncé vous trouverez la question : " déterminer le module et un argument " (il y a un seul module et plusieurs arguments)
- un argument du nombre complexe z se note arg(z)
- l'argument d'un réel non nul est de la forme $k\pi$ où *k* est un entier relatif.
- l'argument d'un imaginaire pur est de la forme $k\pi/2$ où *k* est un entier relatif.

Propriétés sur les arguments :

Pour tous z, z' non nuls on a :

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z) \quad [2\pi]$$

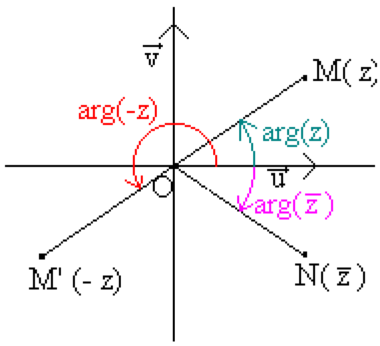
$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$$

$$\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$

$$\arg(z^n) = n \arg(z) \quad [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$



Forme trigonométrique :

z = $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ ou ρ et θ sont deux réels

Exemples de forme trigonométrique :

$$z_1 = 3\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right] \quad z_2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right]$$

Forme exponentielle : (4ème année)

$z = \rho e^{i\theta}$ ou ρ et θ sont deux réels

Exemples de forme exponentielle :

$$z_1 = 3e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad z_2 = \sqrt{3}e^{i\pi} \quad z_3 = \frac{4}{3}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Comment passe -t-on d'une forme à l'autre ?

- de la forme algébrique à la forme trigonométrique ou à la forme exponentielle :
  On calcule le module ρ et un argument θ de $z = a + bi$
  $$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
  $$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = ?$$
  Le cosinus et le sinus sont en général des valeurs remarquables correspondantes aux angles de mesures connues.
  On remplace les valeurs dans la première expression (forme trigonométrique) ou la seconde expression (forme exponentielle) de z
  $$z = \rho\left[\cos\theta + i\sin\theta\right] = \rho e^{i\theta}$$
- de la forme trigonométrique à la forme algébrique :
  $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$ il suffit de remplacer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ par leurs valeurs en général ce sont des valeurs remarquables et de développer ensuite. (voir exemple ci-dessous)
- de la forme trigonométrique à la forme exponentielle et inversement :
  il suffit d'utiliser :
  $$z = \rho\left[\cos\theta + i\sin\theta\right] = \rho e^{i\theta}$$

Exemple :

$\boxed{z = \sqrt{3} - 3i}$ forme algébrique

$\rho = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2}$

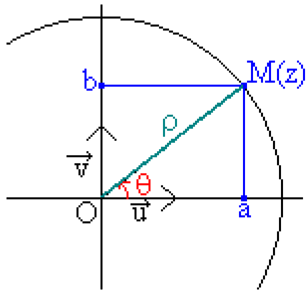
$= \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \theta = -\dfrac{\pi}{3}$$

$$\boxed{z = 2\sqrt{3}\left[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right]}$$

forme trigonométrique

$\boxed{z = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}}$ forme exponentielle

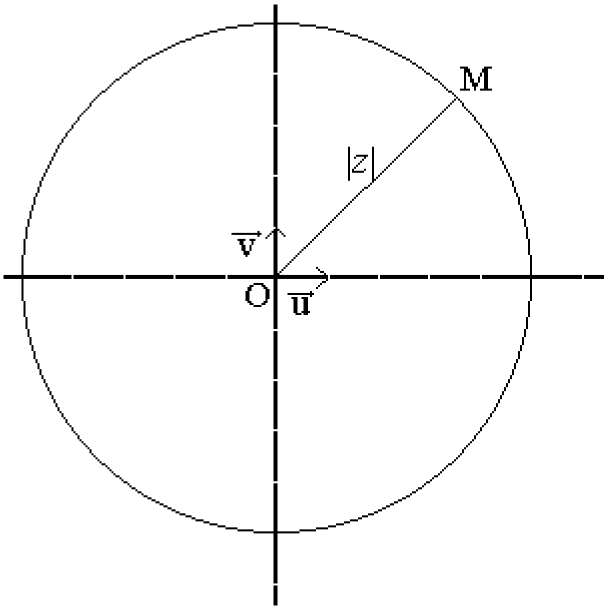


Ensemble de points dont l'affixe vérifie une propriété

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Avant tout ce qu'il faut comprendre, c'est la correspondance entre les nombres complexes et le plan. A toute propriété sur des nombres complexes corresponds une propriété sur les images de ces nombres complexes.
A un nombre complexe correspond un point ou un vecteur.
A un module de nombre complexe correspond une distance ou une norme de vecteur.
A un argument de nombre complexe correspond une mesure d'angle orienté de vecteurs.

Exemples d'ensembles de points :

- Ensemble des points M d'affixe z tels que :
  $|z| = R$
  où R est un nombre réel strictement positif.
  Cet ensemble est le cercle de centre O et de rayon R.



Explication :

à z est l'affixe du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$

à $|z|$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ c'est à dire la distance OM

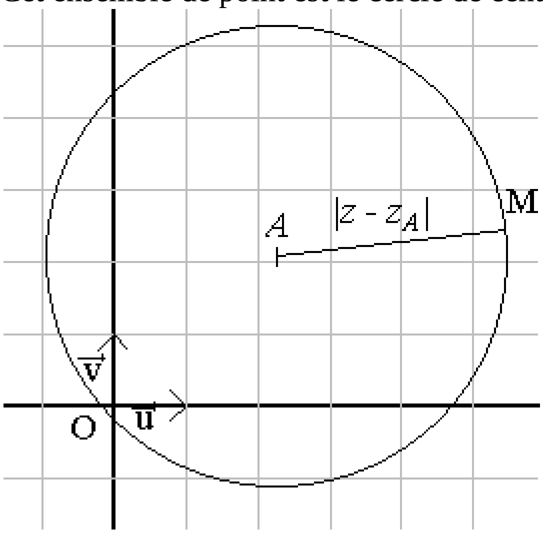
l'ensemble des points M du plan tels que $|z| = R$

est donc l'ensemble des points M tels que $OM = R$

- Ensemble des points M d'affixe z tels que :

  $|z - z_A| = R$

  où z_A est l'affixe d'un point A du plan et R est un nombre réel strictement positif.
  Cet ensemble de point est le cercle de centre A et de rayon R.



Explication :

à z est l'affixe du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$

à z_A est l'affixe du point A ou du vecteur $\overrightarrow{OA}$

$z - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ - $\overrightarrow{OA}$ = $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$ = $\overrightarrow{AM}$

$|z - z_A|$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{AM}$ c'est à dire la distance AM

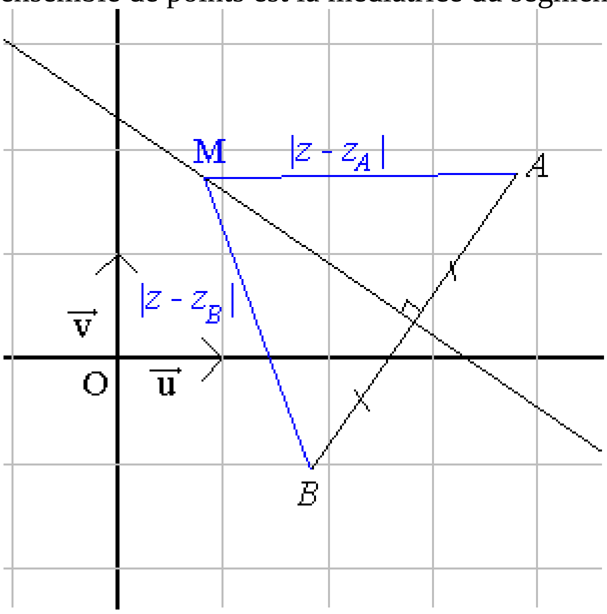
l'ensemble des points M du plan tels que $|z - z_A| = R$

est donc l'ensemble des points M tels que $AM = R$

- Ensemble des points M d'affixe z tels que

  $|z - z_A| = |z - z_B|$

  où z_A et z_B sont les l'affixes respectifs de deux points A et B distincts du plan. Cet ensemble de points est la médiatrice du segment [AB]

  Explication :

  $z - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$

  $z - z_B$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BM}$

  $|z - z_A|$ est la distance AM

  $|z - z_B|$ est la distance BM

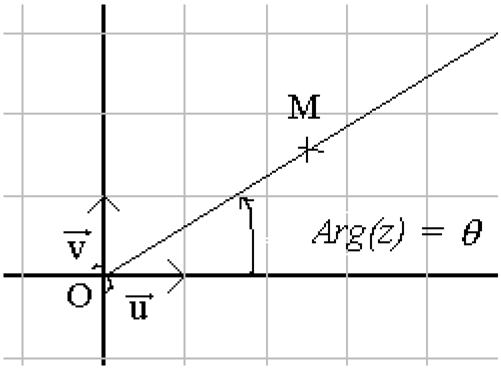
  l'ensemble des points M du plan tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$

  est donc l'ensemble des points M tels que $AM = BM$

- Ensemble des points M d'affixe z tel que

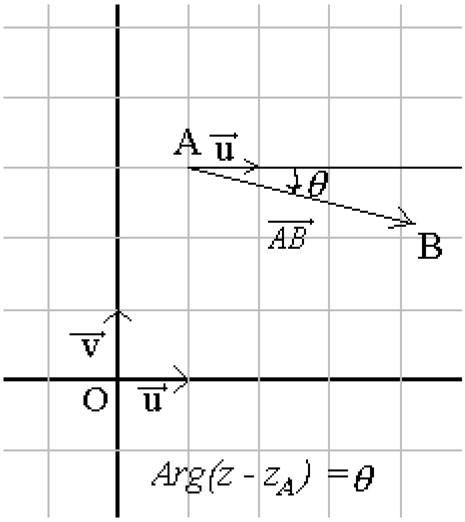
  $Arg(z) = \theta$

  Cet ensemble est une demi droite d'origine O (O non compris dans la demi droite) et dont l'angle avec l'axe (O ; $\vec{u}$) mesure θ radians.



Explication :
z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$
Arg(z) est une mesure de l'angle ($\vec{u}$; $\overrightarrow{OM}$)
l'ensemble des points M tels que $Arg(z) = \theta$ est l'ensemble des points M tels que mes ($\vec{u}$; $\overrightarrow{OM}$) = θ

- Ensemble des points M d'affixe z tels que
  $Arg\left(z - z_A\right) = \theta$
  où z_A est l'affixe d'un point A et θ est un réel .
  Cet ensemble est une demi droite d'origine A (A non compris dans cette demi-droite) et dont l'angle avec la parallèle à l'axe des réels passant par A mesure θ radians.
  Explication :
  $z - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$
  $Arg(z - z_A)$ est une mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{AM})$
  l'ensemble des points M du plan tels que $Arg(z - z_A) = \theta$
  est l'ensemble des points M tels que $mes(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \theta$



- L'ensemble des points M d'affixe z tel que z est réel est l'axe des réels.
- L'ensemble des points M d'affixe z tel que z est un imaginaire pur est l'axe des imaginaires purs.

Résolution d'une équation complexe du premier degré ou s'y ramenant

La difficulté avec ce type d'équation est la présence du nombre i, sinon les propriétés sont les mêmes que dans l'ensemble des nombres réels.
Exemple, on veut résoudre l'équation dans l'ensemble $\mathbb{C}$:

$$\frac{z-2}{z-i} = 3+i$$

on cherche les conditions de résolution, il faut que z soit différent de i, et ensuite on résoud :

$$\frac{z-2}{z-i} = 3+i \Leftrightarrow$$

$$z-2 = (z-i)(3+i) \Leftrightarrow$$

$$z-2 = 3z+iz-3i-i^2 \Leftrightarrow$$

$$z-2 = 3z+iz-3i+1 \Leftrightarrow$$

$$-2z-iz = 3-3i \text{ on rassemble les "z"}$$

$$(-2-i)z = 3-3i \text{ on met z en facteur}$$

$$z = \frac{3-3i}{-2-i} = \frac{-3+3i}{2+i} = \frac{(-3+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$

on multiplie par le conjugué

$$z = \frac{-6+3i+6i-3i^2}{4-i^2} = \frac{-6+9i+3}{5} = \frac{-3+9i}{5} = -\frac{3}{5}+\frac{9}{5}i$$

on met le nombre sous la forme algébrique

$$S=\left\{-\frac{3}{5}+\frac{9}{5}i\right\}$$

Résolution d'une équation avec z et le conjugué de z

Pour résoudre ce type d'équation, il suffit de poser

z = a + bi donc $\bar{z}$ = a - bi (où a et b sont deux réels) et d'utiliser la propriété : un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulle, ou bien la propriété : deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Exemple

$$z + 2i\,\overline{z} = 1 + 3i$$
$$(a + bi) + 2i(a - bi) = 1 + 3i$$
$$a + bi + 2ai - 2bi^2 = 1 + 3i$$
$$a + bi + 2ai + 2b = 1 + 3i$$
$$a + 2b + (2a + b)i = 1 + 3i$$
$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 4a + 2b = 6 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 3a = 5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2b = 1 - \dfrac{5}{3} = \dfrac{-2}{3} \Rightarrow b = \dfrac{-1}{3} \\ a = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$
$$z = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}i$$
$$S = \left\{ \frac{5}{3} - \frac{1}{3}i \right\}$$

Résolution d'un équation du second degré à coefficients réels dans l'ensemble des nombres complexes

Méthode pour résoudre l'équation $a z^2 + b z + c = 0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes (ou a, b , c sont trois réels tels que a non nul) , les résultats sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$ sauf dans le cas ou le discriminant est strictement négatif.
Si $D = b^2 - 4ac < 0$ l'équation $a z^2 + b z + c = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
$$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

L'expression " $\sqrt{-\Delta}$ " peut gêner, en pratique vous n'avez pas besoins de le mettre voyez plutôt la méthode ci-dessous :
on veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2z + 5 = 0$
le discriminant de cette équation $D = 2^2 - 20 = -16$ strictement négatif, plutôt que de vous emmêlez les pinceaux pensez $D = 16\, i^2 = (4\, i)^2$ au lieu de - 16 et appliquez la même méthode que dans $\mathbb{R}$:

$$z_1 = \frac{-2-4i}{2}$$

$$z_2 = \frac{-2+4i}{2}$$

que l'on peut simplifier dans ce cas

z1 = -1 - 2i , z2 = -1 + 2i

Racine carrée d'un nombre complexe($4^{\text{ème}}$ année)

Définition : soit Z un nombre complexe donné, on appelle racine carrée complexe de Z tout nombre complexe z , s'il existe tel que $z^2 = Z$

Cette notion n'est surtout pas à confondre avec la racine carrée dans $\mathbb{R}$ qui est unique contrairement à celle qui vient d'être définie. Les écritures suivantes $\sqrt{3+4i}$ $\sqrt{-1}$ sont fortement déconseillées pour éviter justement l'amalgame entre les deux racines carrées : racine carrée d'un réel positif et racines carrées d'un nombre complexe.

Voila une méthode permettant de déterminant les racines éventuelles d'un nombres complexes :
le plus simple pour déterminer les racines carrées d'un nombres complexe Z de forme algébrique a + bi est de poser z = x + iy (ou x et y sont des réels) puis de résoudre le sytème d'équation à deux inconnues qui en résulte en effet :

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+iy)^2 = a+bi \\ x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = a+bi \\ x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

il est trés simple alors d'en déduire x^2 en ajoutant la première et la troisième équation puis en déduire les valeurs de x puis y .

Exemple :
on veut déterminer les racines carrées de *3 + 4i*

$$z^2 = 3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{3^2+4^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} ou \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

on en déduit deux racines carrées pour 3 + 4i :
-2 - i et 2 + i

Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes (4ème année)

L' équation $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont trois nombres complexes tels que a est un complexe non nul admet deux solutions :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \; et \; z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

$$\text{où } \delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$$

δ est une racine de Δ qui peut être déterminée connaissant la forme exponentielle de Δ ou en utilisant la méthode pour déterminer lesracines carrées du nombre complexe.

Guesmi.B