

Figures isométriques

On dit que deux figures du plan Q_1 et Q_2 sont isométriques si et seulement s'il existe

Au moins une isométrie f telle que $f(Q_1)=Q_2$

Exemples

I) Isométrie qui laisse invariant un bipoint

Soit f une isométrie telle que $f(\{A; B\}) = \{A; B\}$

Si $f(A)=A$ et $f(B)=B$ alors $f=I_d$ ou $f=S_{(AB)}$

Si $f(A)=B$ alors $f(B)=A$ donc puisque toute isométrie conserve le barycentre donc le milieu

D'un segment soit I le milieu de $[AB]$ alors $f(I)=I$

D'où $f=S_I$ ou $f=S_D$; D médiatrice de $[AB]$

II) Isométrie qui laissent invariant un triangle

1) Soit (A, B, C) un repère du plan. cherchons l'ensemble F des isométries f qui conserve le triangle ABC c'est-à-dire $f(\{A, B, C\}) = \{A, B, C\}$

On a 3 choix pour le premier point (A ou B ou C) le premier étant choisi on a 2 choix pour le

Deuxième et donc un choix pour le troisième

Donc on a alors 6 isométries

a) le triangle est quelconque

Donc $AB \neq AC \neq BC$

Donc la seule isométrie qui répond à la question est l'identité du plan donc $f=I_d$

b) triangle isocèle non équilatéral

Supposons par exemple $AB=AC$ et $AB \neq BC$

*L'identité répond à la question

*La médiatrice de $[BC]$

c) le triangle est équilatéral

Posons S_A : l'isométrie définie par : $A \rightarrow A ; B \rightarrow C ; C \rightarrow B$

S_B : : $A \rightarrow C ; B \rightarrow B ; C \rightarrow A$

S_C : : $A \rightarrow B ; B \rightarrow A ; C \rightarrow C$

R_1 : : $A \rightarrow B ; B \rightarrow C ; C \rightarrow A$

R_2 : : $A \rightarrow C ; B \rightarrow A ; C \rightarrow B$

I_d : : $A \rightarrow A ; B \rightarrow B ; C \rightarrow C$

On a $S_A \circ S_A = I_d$ car les points A ; B et C sont invariants par $S_A \circ S_A$ donc S_A est une symétrie

Orthogonale A et le milieu de [BC] est invariant par S_A donc S_A est la symétrie orthogonale d'axe la médiatrice de [BC] soit D_1

De la même manière on montre que S_B et S_C sont deux symétries orthogonales

Montrer que $R_1 = S_C \circ S_A$ et que $R_2 = S_A \circ S_C$

R_1 et R_2 sont des rotations de centre G centre du triangle et d'angles opposés

On a de plus $R_1 \circ R_1 \circ R_1 = I_d$ de même $R_2 \circ R_2 \circ R_2 = I_d$ donc les angles de

R_1 et R_2 sont $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$

3) Isométries du plan conservant une droite

Soit D une droite du plan soit (A ; B) un repère de cette droite et (A', B') l'image de (A, B) par

Une isométrie f ; f conserve D $\Leftrightarrow A' \in D$ et $B' \in D$

On a de plus $AB = A'B'$

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ ou $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$

Donc si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ alors $f = t_{\overrightarrow{AA'}}$

Si $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$ alors $f = S_l$ avec l milieu de [AA']

Exercice

On considère un triangle isocèle ABC tel que $(\widehat{AB}, \widehat{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur \overrightarrow{AB}

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de rot et tor

2) on pose $M_1 = (\text{rot})(M)$ et $M_2 = (\text{tor})(M)$

Quelle est la nature du quadrilatère BCM₁M₂

Guesmi.B