Exercices corriges sur les équations différentielles (Guesmi.B)

Rappels

La solution générale de l'équation (E) y'-αy=u(x) est la fonction f définie par $f(x)=f_0(x)+\lambda e^{\alpha x}$

Ou λϵIR et f_0 est une solution particulière de (E)

Exercice1

a) Résoudre l'équation différentielle (E) -2y'+y=0

On (E) ⇔ $y'-\frac{1}{2}y = 0$ d'où $\alpha=\frac{1}{2}$ donc $f(x)=\lambda e^{\frac{1}{2}x}$

b)y+4y'=0 ⇔ $y'-\left(-\frac{1}{4}\right)y = 0$ donc α=(-1/4)

d'où la solution de l'équation est $f(x)=\lambda e^{\frac{1}{4}x}$

c)déterminer la solution de l'équation différentielle y'-5y=0 qui prend (-1) en (1/2)

on sait que la solution de l'équation ,différentielle y'-αy=0

qui prend y_0 en x_0 est $f(x)=y_0 e^{(x-x_0)}$

donc $f(x)=-e^{5(x-\frac{1}{2})}$

c)soit la fonction définie par $f(x)=2e^{-2x+4}$

i)determiner une équation différentielle du type (E) y'-αy=0 dont f est une solution

reponse

ona : $f'(x)=-4e^{(2x+4)}$ or est une sulution de (E) d'où f'(x)-αf(x)=0

⇔ $-4e^{-2x+4}$ $-2\alpha e^{-2x+4}=0$ donc α=-2

ii)donner une condition initiale vérifiée par f

on sait que si $y_0=f(x_0)$ alors $f(x) = y_0 e^{\alpha(x-x_0)}$ on sait que α=-2

d'où $f(x) = y_0 e^{-2(x-x_0)}$ donc $y_0=4$ et $2x_0=4$ donc $x_0=2$

Guesmi.B

Exercice2

1)Résoudre l'équation differentielle $y'+y=x^2+3x-1$

Cherchons une solution particuliere $f_0(x)=ax^2+bx+c$ doc $f'_0(x)=2ax+b$

D'où $f'_0(x)+f_0(x)=x^2+3x-1 \Leftrightarrow ax^2+(2a+b)x+(b+c)=x^2+3x-1$ donne a=1 ; b=1 et c=-2

Donc $f(x)=x^2+x-2+\lambda e^{-x}$

2)$y'-4y=-5\cos(3x)-10\sin(3x)$

$Y'-y=0$ (E_0) donc $f(x)=f_0(x)+\lambda e^{4x}$;$\lambda\epsilon IR$

Cherchons une solution $f_0(x)=A\cos 3x +B \sin 3x$

Donc $f'_0(x)=-3A\sin 3x+3B\cos 3x$ d'où $f'_0(x)-4f_0(x)=-5\cos 3x-10\sin 3x$ $\Leftrightarrow$

A=2 et B=1

Dou $f(x)=2\cos 3x +\sin 3x +\lambda e^{4x}$

3)$y'-3y=2e^{2x}$ on $\alpha=3$ et (E_0) $y'-3y=0$ donc $f(x)=f_0(x)+\lambda e^{3x}$

Cherchons $f_0(x) =Ae^{2x}$ donc $f'_0(x)=2Ae^{2x}$ en fasant l'identification on aura

$2Ae^{2x}-3Ae^{2x}=2e^{2x}$ alors A=-2

Donc $f(x) = -2e^{2x} + \lambda e^{3x}$

Equation différentielle du second ordre

Equation differentielle du deuxieme ordre sans second membre

Est de la forme $ay''+by'+cy=0$ (E_0) son équation caracteristique $ar^2+br+c=0$ (1)

$\Delta=b^2-4ac$

*si $\Delta=0$ donc (1) admet une seule solution r

Donc l'ensemle des solutions (E) est de la forme $f(x)=(\alpha x+\beta)e^{rx}$ $\alpha\epsilon IR$ et $\beta \in IR$

*si$\Delta>0$ (1) admet deux solutions r_1 et r_2 donc l'ensemle des solutions de (E)est

De la forme $f(x)=\alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ $(\alpha;\beta) \in IR^{\,2}$

*si$\Delta<0$ (1) admet deux solutions complexe $r_1=\alpha+i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$

Donc (E) admet pour ensemble de solution de la forme $f(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

Exemple

1)Resoudre y''+4y'+4y=0   l'équation caractéristique est $r^2+4r+4=0 \Leftrightarrow r=2$

D'où f(x)=($(\alpha x+\beta)e^{2x}$

2)y''+2y'-3y=0   l'équation caractéristique est $r^2+2r-3=0 \Leftrightarrow r=1$ ou $r=-3$

Donc $f(x)=\alpha e^{x}+\beta e^{-3x}$ $(\alpha;\beta)\in IR^{2}$

3)y''+4y=$5e^{x}+4x+4$

(E_0) : y''+4y=0 l'équation caractéristique $r^2+4=0$ deux solutions complexes $r_1=2i$ et $r_2=-2i$

Donc f(x)=Acos2x+Bsin2x

Cherchons une solution particulière $f_0(x)=Ae^{x}+Bx+c$ donc $f'_0(x)=Ae^{x}+B$

$f''_0(x)=Ae^{x}$ donc $f''_0(x)+4f_0(x)=5e^{x}+4x+4$

$\Leftrightarrow\ Ae^{x}+B+4Ae^{x}+4Bx+4c=5e^{x}+4x+4$ donne

A=1 ;B=1 et c=0

D'où $f(x)=(Acos2x+Bsin2x)+e^{x}+1$