Exercices complexe

Quelle est la partie réelle du nombre complexe $z = (2 + i)^2$?		
1	○	2
	○	4
	○	3
	○	1
Quelle est la partie imaginaire du nombre complexe $z = (1 - i)^2$		
2	○	-2
	○	-1
	○	*0*
	○	$-2i$
Le module du nombre complexe $z = 4 + 3i$ est égal à		
3	○	7
	○	$\sqrt{7}$
	○	5
Un argument du nombre complexe $z = 2 - 2i$ est égal à		
4	○	$\frac{\pi}{2}$
	○	$-\frac{\pi}{4}$
	○	$\frac{3\pi}{4}$
Si $z = 2 - 5i$ alors		
5	○	$\overline{z} = 2 + 5i$
	○	$\overline{z} = -2 + 5i$
	○	$\overline{z} = -2 - 5i$
Soit z le nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ alors la forme algébrique de z est égale à		
6	○	$\sqrt{3} + i$
	○	$1 + i\sqrt{3}$
	○	$2 + i\pi/3$
	○	$\sqrt{3} - i$
Dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des solutions de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ est		
7	○	$\varnothing$

	○	$\left\{\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$
	○	$\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$
	○	$\left\{\frac{-1+\sqrt{3}}{2};\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right\}$
La forme exponentielle du nombre complexe z = -2 - 2*i* est		
8 ☑	○	$z=-2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
	○	$z=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
	○	$z=2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
	○	$z=2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
Soient A , B , C et D quatre points distincts du plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'affixes respectives z_A , z_B , z_C , z_D Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$ est		
9 ☑	○	$Arg\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}$
	○	$Arg\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$
	○	$\frac{Arg(z_B-z_A)}{Arg(z_D-z_C)}$
Soient A , B , C points distincts du plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'affixes respectives z_A , z_B , z_C . On sait que : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=3i$ On peut en déduire :		
10 ☑	○	A, B et C sont alignés
	○	ABC est un triangle rectangle en A
	○	ABC est un triangle isocèle en A
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. Soit A le point d'affixe 1 + *i* et B le point d'affixe 1 - *i*. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tel que |z - 1 - i| = 2		
11 ☑	○	c'est l'ensemble vide
	○	c'est le cercle de diamètre [AB]

	○ c'est le cercle de centre A et de rayon 2.
	○ c'est le cercle de centre B et de rayon 2.
	○ c'est la droite (AB)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. Soit A le point d'affixe 1 + *i* et B le point d'affixe 1 - *i*. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tel que |z - 1 - i| = |z - 1 + *i*|	
12 ☑	○ c'est l'ensemble vide
	○ c'est le milieu du segment [AB]
	○ c'est la droite (AB)
	○ c'est le cercle de diamètre [AB]
	○ c'est la médiatrice du segment [AB]
Soit A, B et C trois points du plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'affixes respectives z_A , z_B, z_C telles que $z_A = z_C - z_B$ alors on a :	
13 ☑	○ OACB est un parallélogramme (éventuellement aplati)
	○ A, B et C sont alignés
	○ A est le milieu de [BC]
Les questions 14,15,16 se rapportent au même énoncé. Soient A et B deux points du plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$ et $z_B = 3 - i$, soit I le milieu de [AB] d'affixe z_I alors :	
14 ☑	○ AB = 2,82
	○ AB = 0
	○ AB = $\sqrt{10} - \sqrt{2}$
	○ AB = $2\sqrt{2}$
15 ☑	○ $z_I = 1 - i$
	○ $z_I = 2$
	○ $z_I = 2 - 2i$
	○ $z_I = -2$
16 ☑	○ $(\vec{u};\overrightarrow{OA}) = 3\pi/4$
	○ $(\vec{u};\overrightarrow{OA}) = -\pi/4$
	○ $(\vec{u};\overrightarrow{OA}) = \pi/4$
	○ $(\vec{u};\overrightarrow{OA}) = -3\pi/4$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$
L'application du plan complexe qui à tout point M d'affixe *z* fait correspondre le point M' d'affixe *z'*tel que z' = z + 1 + *i* est une

17

- homothétie de centre le point I d'affixe (1 + *i*) et de rapport $\sqrt{2}$
- translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe 1 + *i*
- rotation de centre O et d'angle de mesure $\pi/4$
- rotation de centre I d'affixe 1 + *i* et d'angle de mesure $\pi/4$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$
L'application du plan complexe qui à tout point M d'affixe *z* fait correspondre le point M' d'affixe *z'*tel que z' = 4z est une

18

- homothétie de centre O et de rapport 4
- translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe 4
- rotation de centre O et d'angle de mesure π

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$
L'application du plan complexe qui à tout point M d'affixe *z* fait correspondre le point M ' d'affixe *z'*tel que :

$$z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$$

est une

19

- rotation de centre O et d'angle de mesure $3\pi/4$
- homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2}$
- rotation de centre O et d'angle de mesure $-\pi/4$
- rotation de centre O et d'angle de mesure $\pi/4$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Que peut - on dire de plusieurs points dont les affixes ont même module.

20

- Il appartiennent à un même cercle de centre O
- Il appartiennent à une même droite passant par O
- On ne peut rien en dire.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Que peut - on dire de plusieurs points dont les affixes ont même argument..

21

- Il appartiennent à un même cercle de centre O
- Il appartiennent à une même droite passant par O
- On ne peut rien en dire.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

L'ensemble des points M d'affixe *z* tel que

$Z = \dfrac{z+1}{z-1}$

est imaginaire pur est

22 ☑	○	Le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point d'affixe 1
	○	L'axe des imaginaires purs privé du point d'affixe 1.
	○	L'axe des réels privé du point d'affixe 1.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$.
L'ensemble des points M d'affixe *z* tel que

$Z = \dfrac{z+1}{z-1}$

est réel est

23 ☑	○	Le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point d'affixe 1
	○	L'axe des imaginaires purs privé du point d'affixe 1.
	○	L'axe des réels privé du point d'affixe 1.

La forme algébrique du nombre complexe de module 2 et d'argument 5 π /6 est :

24 ☑	○	$\sqrt{3} - i$
	○	$-\sqrt{3} - i$
	○	$-\sqrt{3} + i$
	○	$1 - i\sqrt{3}$

En utilisant les formules d'Euler :

$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

transformer l'expression $\sin 2\theta \cos 3\theta$.

$\sin 2\theta \cos 3\theta =$

25 ☑	○	$\frac{1}{2}(\sin 5\theta - \sin\theta)$
	○	$\frac{1}{2}(\sin 5\theta + \sin\theta)$
	○	$\frac{1}{2}(\sin 5\theta - \cos 5\theta)$

Question 26,27,28,29
On considère les nombres complexes :

$z_1 = -2 + 2i \quad z_2 = -2 + 2i\sqrt{3} \quad z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$

La forme algébrique du nombre complexe z_3 est :

26 ☑	○	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

	○	$\frac{\sqrt{3}-1}{4}+\frac{\sqrt{3}+1}{4}i$
	○	$\frac{-1+i}{-1+i\sqrt{3}}$
	○	$\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\frac{\sqrt{3}-1}{4}i$
La forme exponentielle du nombre complexe z_1 est		
27 ☑	○	$2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
	○	$2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
	○	$2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
	○	$2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
La forme exponentielle du nombre complexe z_2 est		
28 ☑	○	$4e^{-i\frac{\pi}{3}}$
	○	$4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
	○	$4e^{i\frac{2\pi}{3}}$
	○	$4e^{i\frac{\pi}{3}}$
La forme exponentielle du nombre complexe z_3 est		
29 ☑	○	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$
	○	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$
	○	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$
	○	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$
Ecrire le nombre complexe : $z=\frac{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}}$ sous la forme exponentielle.		
30 ☑	○	$e^{i\frac{\pi}{15}}$
	○	$e^{i\frac{8\pi}{15}}$

	○	$e^{i\frac{2\pi}{15}}$
	○	$e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Correction exercice1(complexe)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation
2. $z^2 + 4z + 16 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 16 = 16 - 64 = -48 < 0$

donc deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{-4 - \sqrt{48}i}{2} = \frac{-4 - \sqrt{16 \times 3}i}{2} = \frac{-4 - 4i\sqrt{3}}{2} = -2 - 2i\sqrt{3}$

$z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$

2. Pour tout nombre complexe z, on pose P(z) = z^3 - 64.

a. P(4) = 4^3 - 64 = 64 - 64 = 0 donc est une racine de P(z) donc

b. P(z) peut s'écrire sous la forme P(z) = (z - 4)(az^2 + bz + c)

= az^3 + bz^2 + cz - 4az^2 - 4bz - 4c = az^3 + (b - 4a)z^2 + (c - 4b)z - 4c

Par identification on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = 0 \\ c - 4b = 0 \\ -4c = -64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 16 \end{cases}$$

P(z) = (z - 4)(z^2 + 4z + 16)

c. P(z) = 0 équivaut à : (z - 4)(z^2 + 4z + 16) = 0 soit

z - 4= 0 ou z^2 + 4z + 16 = 0 donc

z = 4 ou z = - 2 - 2$i\sqrt{3}$ ou z = - 2 + 2$i\sqrt{3}$

donc S = { 4 ; - 2 - 2$i\sqrt{3}$; - 2 + 2$i\sqrt{3}$ }

3. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

z_A = -2 + 2$i\sqrt{3}$, $z_B = \overline{z_A}$, z_C = 4.

a.

$$z_A = -2 + 2i\sqrt{3}$$

$$|z_A| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_A = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta_A = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \theta_A = \frac{2\pi}{3} = Arg(z_A)$$

$$z_A = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

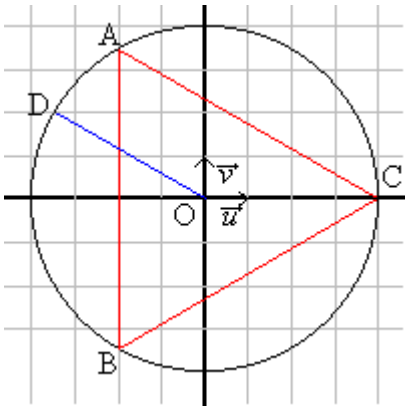
$$z_B = -2 - 2i\sqrt{3}$$

$$|z_A| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_B = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta_B = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \theta_B = \frac{-2\pi}{3} = Arg(z_B)$$

$$z_B = 4e^{i\frac{-2\pi}{3}}$$

b.



c.

$$AB = |z_B - z_A| = \left|-2 - 2i\sqrt{3} - \left(-2 + 2i\sqrt{3}\right)\right| = \left|-4i\sqrt{3}\right| = 4\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = \left|4 - \left(-2 - 2i\sqrt{3}\right)\right| = \left|6 + 2i\sqrt{3}\right| = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36+12}$$

$$BC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$AC = |z_C - z_A| = \left|4 - \left(-2 + 2i\sqrt{3}\right)\right| = \left|6 - 2i\sqrt{3}\right| = \sqrt{6^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}$$

conclusion : AB = BC = AC donc ABC est un triangle équilatéral.

4. a.

$$z_D = z_A e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{4\pi}{6}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow |z_D| = 4, Arg(z_D) = \frac{5\pi}{6}$$

b.

$$z_D = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 4\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2i$$

Correction Exercice2(complexe):

1. $z^3 - 8 = (z - 2)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c =$
$az^3 + (b - 2a)z^2 + (c - 2b)z - 2c$

Par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 0 \\ c - 2b = 0 \\ -2c = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

$z^3 - 8 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4)$.

$z^3 - 8 = 0$ équivaut à

$(z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$ équivaut à

$z - 2 = 0$ ou $z^2 + 2z + 4 = 0$

$z = 2$ ou $z^2 + 2z + 4 = 0$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12 < 0$$

donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{12}}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{2} = -1 - i\sqrt{3}$$

$$z_2 = -1 + i\sqrt{3}$$

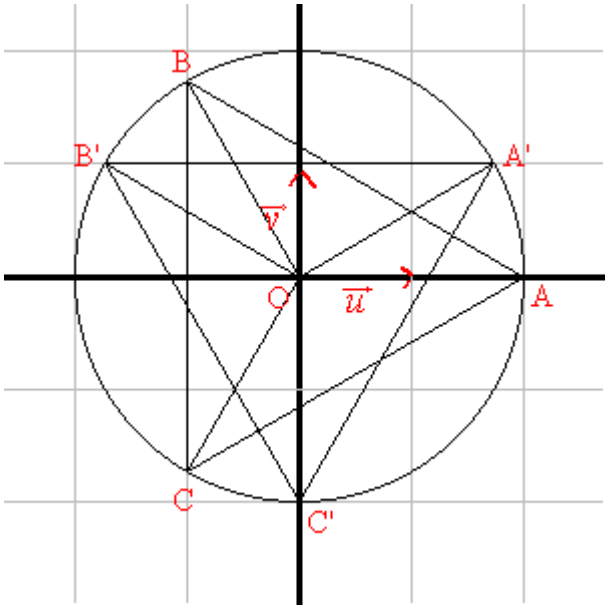
Les solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 - 8 = 0$ sont donc 2 ; $-1 - i\sqrt{3}$; $-1 + i\sqrt{3}$

2. a. Pour placer correctement et précisément les points B et C on peut calculer les modules des nombres complexes $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -1 - i\sqrt{3}$:

$$OB = |z_B| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$$OC = |z_C| = |-1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

OB = OC = 2 donc les points et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.



b.

$$AB = |z_B - z_A| = |-1+i\sqrt{3}-2| = |-3+i\sqrt{3}|$$

$$= \sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$AC = |z_C - z_A| = |-1-i\sqrt{3}-2| = |-3-i\sqrt{3}|$$

$$= \sqrt{(-3)^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |-1-i\sqrt{3}-(-1+i\sqrt{3})| = |-2i\sqrt{3}|$$

$$= \sqrt{0^2+(-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

AB = BC = AC donc ABC est un triangle équilatéral .

3. L'écriture complexe de R est :

$$z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z$$

a.

$$z_A = 2 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = \boxed{2e^{i0}}$$

$$z_B = -1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \boxed{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

$$z_C = -1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{-2\pi}{3}+i\sin\frac{-2\pi}{3}\right) = \boxed{2e^{i\frac{-2\pi}{3}}}$$

$$z_A' = e^{i\frac{\pi}{6}}z_A = e^{i\frac{\pi}{6}}2e^{i0} = \boxed{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$z_B' = e^{i\frac{\pi}{6}}z_B = e^{i\frac{\pi}{6}}2e^{i\frac{2\pi}{3}} = \boxed{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

$$z_C' = e^{i\frac{\pi}{6}}z_C = e^{i\frac{\pi}{6}}2e^{i\frac{-2\pi}{3}} = \boxed{2e^{i\frac{-\pi}{2}}}$$

b. voir **2.a.**

c.

$$z_{A'}{}^3 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 = 8e^{i\frac{3\pi}{6}} = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 8(0+i) = 8i$$

$$z_{B'}{}^3 = \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^3 = 8e^{i\frac{5\pi}{2}} = 8(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}) = 8(0+i) = 8i$$

$$z_{C'}{}^3 = \left(2e^{i\frac{-\pi}{2}}\right)^3 = 8e^{i\frac{-3\pi}{2}} = 8(\cos\frac{-3\pi}{2} + i\sin\frac{-3\pi}{2}) = 8(0+i) = 8i$$

$$z_{A'}{}^3 = z_{B'}{}^3 = z_{C'}{}^3 = 8i$$

$z_{A'}$, $z_{B'}$, et $z_{C'}$ sont solutions de l'équation $z^3 = 8i$.

EXERCICE3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$.

2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 1 - i\sqrt{3}$.

a) Déterminer le module et un argument de z_A et z_B.

b) Donner la forme exponentielle de z_A .

c) Placer les points A et B dans le plan muni du repère $(O;\vec{u};\vec{v})$

3. On désigne par R la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$$

a) Indiquer la nature de la transformation R et préciser ses éléments caractéristiques.

b) On nomme C l'image du point A par la transformation R. Déterminer la forme exponentielle de l'affixe z_C du point C. En déduire sa forme algébrique.

c) Placer le point C.

d) Montrer que le point B est l'image du point C par la transformation R. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse

Correction

1.

$$z^2 - 2z + 4 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12 < 0$$

donc deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{2 - i\sqrt{12}}{2} = \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3} \qquad z_2 = 1 + i\sqrt{3}$$

les deux solutions de l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$ sont $1 + i\sqrt{3}$ et $1 - i\sqrt{3}$

2. a)

$$z_A = 1 + i\sqrt{3} \qquad \boxed{|z_A| = \sqrt{1 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2} \qquad \left.\begin{array}{l} \cos\theta_A = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \theta_A = \boxed{\frac{\pi}{3} = Arg(z_A)}$$

$$z_B = 1 - i\sqrt{3} \qquad \boxed{|z_B| = \sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2} \qquad \left.\begin{array}{l} \cos\theta_B = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_B = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \theta_B = \boxed{\frac{-\pi}{3} = Arg(}$$

b) z_A a pour module 2 et un argument est $\pi/3$ donc :

$$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

c) Voir figure

3. On désigne par R la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$$

a) R est une rotation de centre O et d'angle de mesure $2\pi/3$.

b)

$$z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)} = \underbrace{2e^{i\pi}}_{\text{forme exponentielle}} = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2(-1) =$$

c) Voir figure

d)

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2e^{i\pi} = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2e^{i\frac{-\pi}{3}} = z_B$$

donc B est l'image de C par la rotation R.

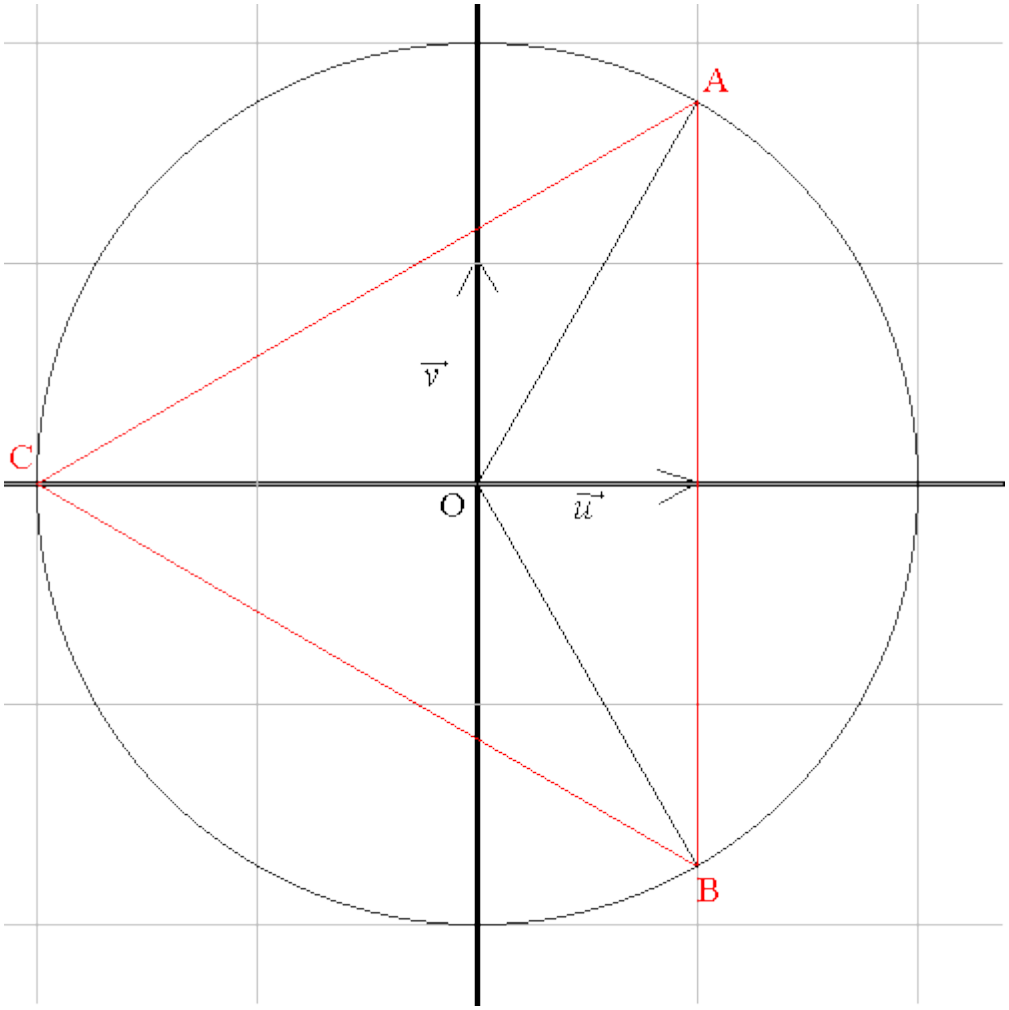
Montrons que ABC est un triangle équilatéral :

$$AB = |z_B - z_A| = |1 - i\sqrt{3} - (1 + i\sqrt{3})| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |-2 - (1 - i\sqrt{3})| = |-3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$AC = |z_C - z_A| = |-2 - (1 + i\sqrt{3})| = |-3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

AB = AC = BC donc le triangle ABC est un triangle équilatéral.



Exercice4

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\pi/2$.
1) Montrer que $(1 + i)^6 = - 8i$
2) On considère l'équation (E) $z^2 = - 8i$
a)Déduire de 1) une solution de l'équation (E)
b) L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.
3) Déduire également de 1) une solution de l'équation (E') : $z^3 = - 8i$.
4) On considère le point A d'affixe 2i et la rotation r de centre O et d'angle $2\pi/3$.
a) Déterminer l'affixe b du point B image de A par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r.
b) Montrer que b et c sont solutions de (E')
5) a) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ (unité graphique 2cm) , représenter les points A,B et C.
b) Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?
c) Déterminer le centre de gravité de cette figure.

Correction :

1)
$(1 + i)^6 = [(1 + i)^2]^3 = (1 +2i + i^2)^3 = (1 +2i - 1)^3 = (2i)^3 = 8i^3 = 8i \times i^2 = - 8i$
2) a)
$z^2 = - 8i \Leftrightarrow$
$z^2 = (1 + i)^6 \Leftrightarrow$
$z = (1 + i)^3$ ou $z = - (1 + i)^3$
$z = (1 + i)^3$ est une solution de l'équation (E)
2) b)
$z = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 +3i - 3 - i = -2 + 2i$ et $z = 2 - 2i$ sont les deux solutions de l'équation (E).
3) $z^3 = - 8i$
$z^3 = (1 + i)^6$ d'où
$z = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$ est une solution de l'équation (E') .
4) a)

$$b = e^{i\frac{2\pi}{3}} 2i = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} \right) 2i = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) 2i = -i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} - i$$

$$c = e^{i\frac{2\pi}{3}} b = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(-\sqrt{3} - i \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{3}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - i$$

4) b)

$$b^3 = \left(-\sqrt{3} - i\right)^3 = \left(-\sqrt{3} - i\right)\left(-\sqrt{3} - i\right)^2 = \left(-\sqrt{3} - i\right)\left(3 + 2i\sqrt{3} - 1\right)$$

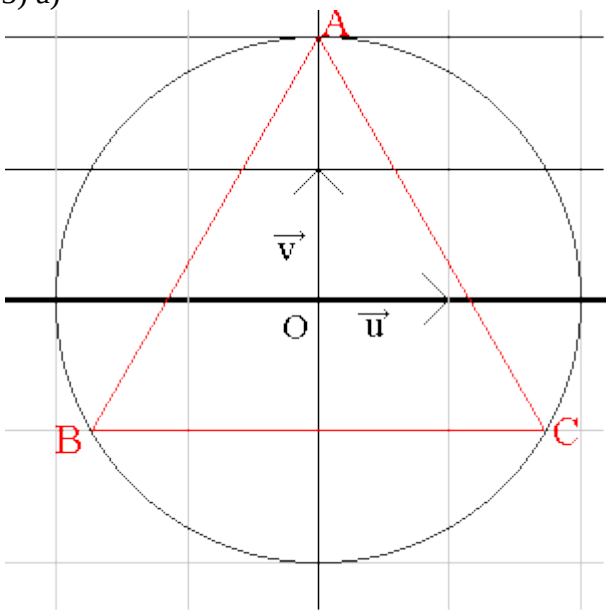
$$= \left(-\sqrt{3} - i\right)\left(2 + 2i\sqrt{3}\right) = -2\sqrt{3} - 6i - 2i + 2\sqrt{3} = -8i$$

$$c^3 = \left(\sqrt{3} - i\right)^3 = \left(\sqrt{3} - i\right)\left(\sqrt{3} - i\right)^2 = \left(\sqrt{3} - i\right)\left(3 - 2i\sqrt{3} - 1\right)$$

$$= \left(\sqrt{3} - i\right)\left(2 - 2i\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} - 6i - 2i - 2\sqrt{3} = -8i$$

b et *c* sont donc solution de l'équation (E')

5) a)



5) b)

soit *a* l'affixe du point A :

$$AB = |b - a| = \left|-\sqrt{3} - i - 2i\right| = \left|-\sqrt{3} - 3i\right| = \sqrt{3 + 9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$AC = |c - a| = \left|\sqrt{3} - i - 2i\right| = \left|\sqrt{3} - 3i\right| = \sqrt{3 + 9} = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |c - b| = \left|\sqrt{3} - i - \left(-\sqrt{3} - i\right)\right| = \left|\sqrt{3} - i + \sqrt{3} + i\right| = 2\sqrt{3}$$

AB = BC = AC donc le triangle ABC est un triangle équilatéral.

5) c) soit G le centre de gravité du triangle ABC ,

$$z_G = \frac{a + b + c}{3} = \frac{2i - \sqrt{3} - i + \sqrt{3} - i}{3} = 0$$

G est confondu avec le point O origine du repère.

Exercice5

1.
1. a. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 6z + 12 = 0$.
1. b. Ecrire les solutions de cette équation sous forme exponentielle.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$, placer les points A, B et I d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + i\sqrt{3}, \quad z_B = 3 - i\sqrt{3}, \quad z_I = 2$$

2. a. Montrer que les points A, B et O sont sur un cercle de centre I dont on précisera le rayon.
2. b. Donner, en le justifiant, la nature du triangle OAB.

2. c. Placer le point C d'affixe $z_C = -2i\sqrt{3}$. Montrer que les points A, C et I sont alignés.

Correction :

1. a.
$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 36 - 48 = -12 < 0$
donc l'équation $z^2 - 6z + 12 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{6 - i\sqrt{12}}{2} = \frac{6 - 2i\sqrt{3}}{2} = \frac{2(3 - i\sqrt{3})}{2} = 3 - i\sqrt{3}$$

$$z_2 = 3 + i\sqrt{3}$$

1. b.
Soient θ_1 et θ_2 des arguments de z_1 et z_2 :

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_1 = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}^2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_1 = \frac{-\pi}{6}$$

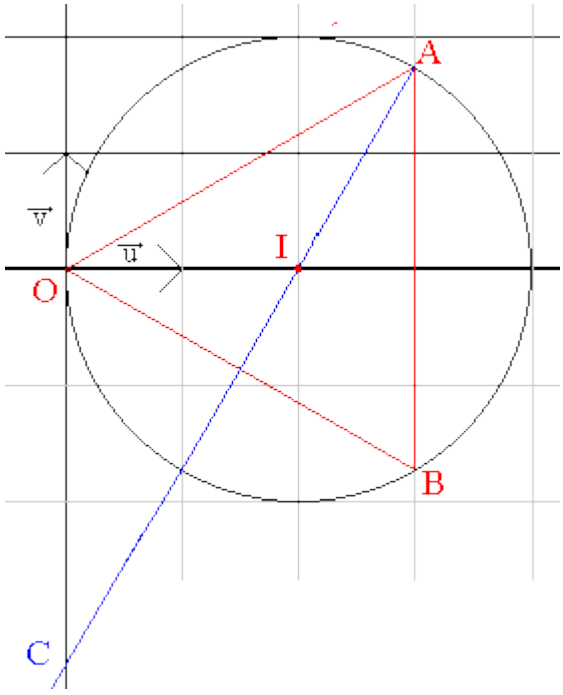
$$z_1 = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$|z_2| = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_2 = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}^2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

2.



2. a .

$$IA = |z_A - z_I| = |3 + i\sqrt{3} - 2| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$IB = |z_B - z_I| = |3 - i\sqrt{3} - 2| = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$IO = |-z_I| = 2$$

IA = IB = IO = 2

donc les points A, B et O appartiennent au cercle de centre I et de rayon 2.

2. b.

Première méthode :

$OA = |z_A| = 2\sqrt{3}$

$OB = |z_B| = 2\sqrt{3}$

donc le triangle AOB est isocèle en O

de plus :

$$mes\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right) = mes\left(\overrightarrow{OA}; \vec{u}\right) + mes\left(\vec{u}; \overrightarrow{OB}\right) \quad [2\pi]$$

$$= -Arg(z_A) + Arg(z_B) \quad [2\pi] = -\frac{\pi}{6} + \frac{-\pi}{6} \quad [2\pi]$$

$$= \frac{-\pi}{3} \quad [2\pi]$$

or un triangle isocèle ayant un angle de mesure 60° ou $\pi/3$ radians est un triangle équilatéral donc OAB est un triangle équilatéral.

Deuxième méthode :

$OA = |z_A| = 2\sqrt{3}$

$OB = |z_B| = 2\sqrt{3}$

$AB = |z_B - z_A| = |3 - i\sqrt{3} - (3 + i\sqrt{3})| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

OA = OB = AB donc le triangle AOB est un triangle équilatéral.

2. c.

$$\overrightarrow{AC}\,(z_C - z_A) \Rightarrow \overrightarrow{AC}\left(-2i\sqrt{3} - 3 - i\sqrt{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AC}\left(-3 - 3i\sqrt{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AI}\,(z_I - z_A) \Rightarrow \overrightarrow{AI}\left(2 - 3 - i\sqrt{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AI}\left(-1 - i\sqrt{3}\right) \Rightarrow 3\overrightarrow{AI}\left(-3 - 3i\sqrt{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AI} \Rightarrow \text{ les vecteurs } \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AI} \text{ sont colinéaires}$$

donc les points A, C et I sont alignés.

Exercice6

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$. On prendra 2 cm pour unité graphique. Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1. a) Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

b) Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\pi/4$

Placer les points A, B et B'.

2. On appelle *f* la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M'd'affixe z'tel que z' = (l + i)z + 1.

a) Montrer que B a pour image B' par *f*.

b) Montrer que A est le seul point invariant par *f*

c) Etablir que pour tout nombre complexe z distinct de i,

$$\frac{z' - z}{i - z} = -i$$

Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles.

En déduire une méthode de construction de M ' à partir de M, pour M distinct de A.

3. a) Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie |z - 2| = $\sqrt{2}$

b) Démontrer que z' - 3 - 2i = (l + i)(z - 2).

En déduire que si le point M appartient à Σ_1 alors son image M' par *f* appartient à un cercle Σ_2 dont on précisera le centre et le rayon.

c) Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B'

Correction

1. **a) b)**

$\overrightarrow{AB_1} = \sqrt{2}\overrightarrow{AB}$ donc $z_{B_1} - z_A = \sqrt{2}(z_B - z_A)$

$z_{B_1} = \sqrt{2}(z_B - z_A) + z_A = \sqrt{2}(2 - i) + i = \boxed{2\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})i = z_{B_1}}$

$\overrightarrow{AB_1} \overset{r_{\frac{\pi}{4}}}{\mapsto} \overrightarrow{AB'}$ donc $z_{B'} - z_A = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_{B_1} - z_A)$

$z_{B'} - z_A = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})(2\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})i - i)$

$z_{B'} - z_A = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})(2\sqrt{2} - i\sqrt{2}) = 2 - i + 2i + 1 = 3 + i$

$\boxed{z_{B'} = 3 + 2i}$

Voir figure

2. a)

$(1+i)z_B + 1 = 2(1+i) + 1 = 3 + 2i = z_{B'}$

b)

$z' = z \Leftrightarrow z = (1+i)z + 1 \Leftrightarrow 0 = iz + 1 \Leftrightarrow iz = -1 \Leftrightarrow z = \frac{-1}{i} = \frac{-i}{i^2} = i = z_A$

A(i) est donc le seul point qui est sa propre image.

c) Pour tout nombre complexe z distinct de i,

$\frac{z' - z}{i - z} = \frac{(1+i)z + 1 - z}{i - z} = \frac{z + iz + 1 - z}{i - z} = \frac{iz + 1}{i - z} = \frac{i(z - i)}{i - z} = -i$

Pour tout nombre complexe z distinct de i,

$\frac{z' - z}{i - z} = -i$

$\frac{z' - z}{i - z} = -i \Rightarrow \left|\frac{z' - z}{i - z}\right| = |-i| \Rightarrow \frac{|z' - z|}{|i - z|} = 1 \Rightarrow \frac{MM'}{AM} = 1 \Rightarrow AM' = MM'$

$\frac{z' - z}{i - z} = -i \Rightarrow Arg\left(\frac{z' - z}{i - z}\right) = \frac{-\pi}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MM'}\right) = \frac{-\pi}{2}$

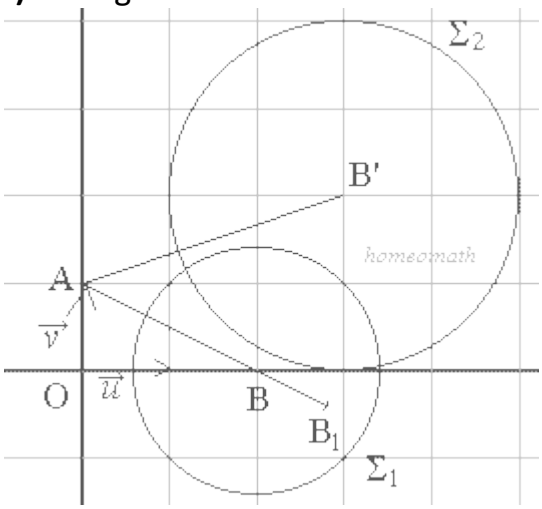
M' est l'image du point A par le quart de tour indirect de centre M .

3. a) | z - 2 | représente la distance BM, l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie

|z - 2| = $\sqrt{2}$ est l'ensemble des points M tels que BM = $\sqrt{2}$, c'est donc le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

b) z' - 3 - 2i = (1 + i)z + 1 - 3 - 2i = (1 + i)z - 2 - 2i = (1 + i)z - 2(l + i) = (1 + i)(z - 2)

Si point M appartient à Σ_1 alors |z - 2| = $\sqrt{2}$ d'où |z' - 3 - 2i| = | 1 + i || z - 2| = $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ = 2
soit B'M' = 2 donc M' appartient au cercle Σ_2 de centre B' et de rayon 2.
c)Voir figure



Exercice7

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
On pose $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $Z = z_1^3 z_2$
1)a) Mettre z_1^3 sous forme algébrique (on pourra utiliser une identité remarquable).
b) Mettre Z sous forme algébrique.
2)a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_1 , puis le module et un argument du nombre complexe z_1^3.
b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_2 .
c) Déduire des questions précédentes un écriture trigonométrique de Z.
3) En comparant les écritures algébrique et trigonométrique de Z, déterminer les valeurs exactes de cos (11 π /12) et sin (11 π /12).

Correction

1) a)

$$z_1^3 = (1+i)^3 = (1+i)(1+i)^2 =$$

$$(1+i)(1+2i+i^2) = (1+i)(2i) = 2i + 2i^2 = -2 + 2i$$

$$Z = z_1^3 z_2 = (-2+2i)(\sqrt{3}+i) = -2\sqrt{3} - 2i + 2i\sqrt{3} + 2i^2$$

b) $$= (-2\sqrt{3} - 2) + (-2 + 2\sqrt{3})i$$

2) a)

$$|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

soit θ_1 un argument de z_1 on a :

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(z_1)^3 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

donc 3 π /4 est un argument de z_1^3 et $\sqrt{2}$ son module.

2) b)

$$|z_2| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

soit θ_2 un argument de z_2 on a :

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

on en déduit la forme trigonométrique puis la forme exponentielle du nombre z_1

$$z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

2) c) des formes exponentielle de z_1^3 et z_2 on en déduit la forme exponentielle du nombre complexe Z ainsi que sa forme trigonométrique :

$$Z = z_1^3 z_2 = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}+i\frac{\pi}{6}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{12}+i\frac{2\pi}{12}}$$

$$Z = 4\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}} = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

3) On sait que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont les même parties réelles et les même parties imaginaires :

$$4\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) = (-2\sqrt{3} - 2) + (-2 + 2\sqrt{3})i$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{-2\sqrt{3}-2}{4\sqrt{2}} = \dfrac{-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{8} = \dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{-2+2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{8} = \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{cases}$$

Exercice8

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On note : i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$;

z_1 le nombre complexe -1 -i $\sqrt{3}$.

1. On pose $z_2 = iz_1$, montrer que $z_2 = \sqrt{3}$ - i

2.a. Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1 et z_2 .

2.b. Placer dans le plan P le point M_1 d'affixe z_1 et le point M_2 d'affixe z_2 .

3. Soient A, B et C les points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C telles que :

$z_A = -2 + 2i\sqrt{3}$; $z_B = 2 - 2i\sqrt{3}$ et $z_C = 8$

3.a. Montrer que $z_A = 2\,z_1$ et que $z_B = -z_A$

3.b. Placer les points A,B et C dans le plan P.

3.c. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

3.d. Calculer l'affixe du point D de sorte que le quadrilatère ABCD soit un rectangle.

Correction :

1.

$$z_2 = iz_1 = i\ (-1 - i\sqrt{3}) = -i - i^2\sqrt{3} = -i + \sqrt{3} = \sqrt{3} - i$$

2.a . Soient θ_1 et θ_2 des arguments respectifs de z_1 et z_2 :

$$|z_1| = |-1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$|z_2| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

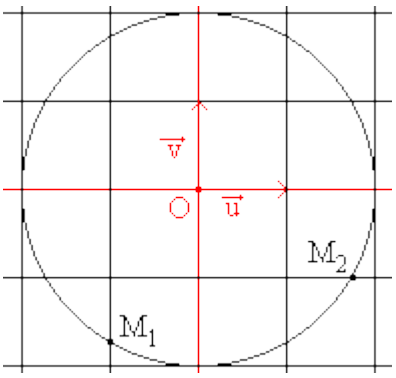
On peut aussi utiliser les propriétés du module d'un nombre complexe :

$$|z_2| = |iz_1| = |i| \cdot |z_1| = 1 \times 2 = 2$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta_1 = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \text{donc } \theta_1 = \frac{-2\pi}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{-1}{2}\end{array}\right\} \text{donc } \theta_2 = \frac{-\pi}{6}$$

2.b.

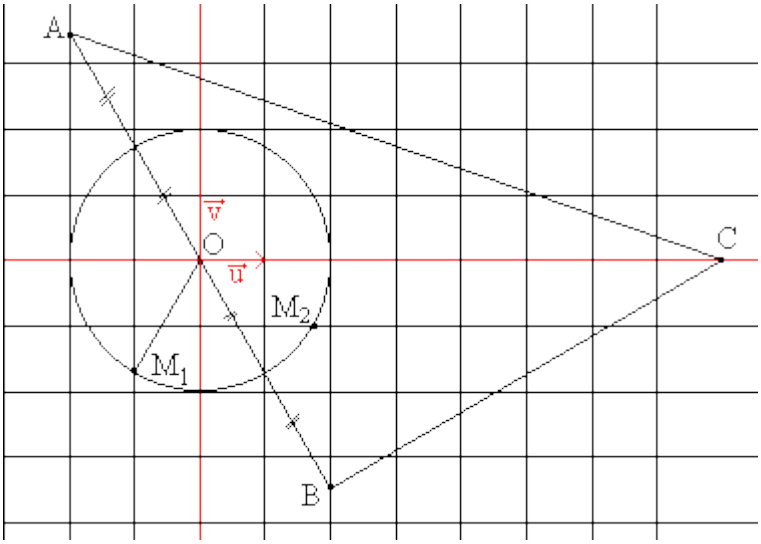


3.a.

$$2\overline{z_1} = 2\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = -2 + 2i\sqrt{3} = z_A$$

$$-z_A = -(-2 + 2i\sqrt{3}) = 2 - 2i\sqrt{3} = z_B$$

3.b.



3.c.

$$AB = |z_B - z_A| = |2 - 2i\sqrt{3} + 2 - 2i\sqrt{3}| =$$

$$|4 - 4i\sqrt{3}| = \sqrt{4^2 + (-4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8$$

$$BC = |z_C - z_B| = |8 - 2 + 2i\sqrt{3}| = |6 + 2i\sqrt{3}| =$$

$$= \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$AC = |z_C - z_A| = |8 + 2 - 2i\sqrt{3}| = |10 - 2i\sqrt{3}| =$$

$$\sqrt{10^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{100 + 12} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 + BC^2 = 64 + 48 = 112 \\ AC^2 = 112 \end{array}\right\} \text{donc } AC^2 = AB^2 + BC^2$$

d'après la réciproque du théorème de Pythagore ABC est rectangle en B.

3.d. Pour que ABCD soit un rectangle il suffit que ABCD soit un parallélogramme puisque ABC est un triangle rectangle.

Pour que ABCD soit un rectangle il suffit donc que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Soient z_A, z_B, z_C, z_D les affixes respectifs de A,B, C, D

de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ on en déduit : $z_B - z_A = z_C - z_D$ soit $z_D = z_A - z_B + z_C$

$z_D = -2 + 2i\sqrt{3} - 2 + 2i\sqrt{3} + 8 = 4 + 4i\sqrt{3}$ est donc l'affixe du point D.

Exercice9

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A, B, C d'affixes respectives : zA = $\sqrt{3}$ + 3i ; zB = 2$\sqrt{3}$ et zC= 2i

1. Placer les points A, B et C dans le plan complexe (sur papier millimétré).

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe zA.

3. a. Calculer les modules des nombres complexes :

zA - zC , zB - zA et zB - zC

En déduire la nature du triangle ABC.

b. Déterminer l'affixe du centre K du cercle (G) circonscrit au triangle ABC ; préciser le rayon de ce cercle.

c. Montrer que le point O appartient au cercle(G)

4. On considère le point D d'affixe $z_D = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

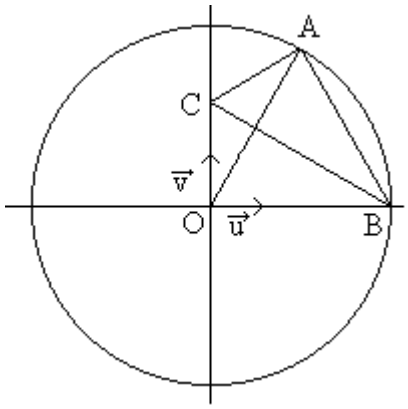
a. Montrer que zD = $\sqrt{3}$ - i

b. Calculer l'affixe du milieu M du segment [AD].

c. Démontrer que le quadrilatère ABDC est un rectangle.

Correction

1.



2. Déterminons le module de zA = $\sqrt{3}$ + 3i

|zA| = $\sqrt{}$3+9 = $\sqrt{}$12 = 2$\sqrt{}$3

Déterminons un argument de zA

soit qA un argument de zA = $\sqrt{3}$ + 3i, on a :

cos qA = $\sqrt{3}$ /2$\sqrt{3}$ = 1/2

sin qA = 3/2$\sqrt{3}$ = $\sqrt{3}$ /2

On en déduit q = p/3 est un argument de zA

3. a.

AC = |zA - zC |= | $\sqrt{3}$ + 3i - 2i |= | $\sqrt{3}$ + i |= $\sqrt{3}$ + 1 = $\sqrt{4}$ = 2

AB = | zB - zA |=| 2 $\sqrt{3}$ - ($\sqrt{3}$ + 3i)| = | $\sqrt{3}$ - 3i |= $\sqrt{3}$ +9 = $\sqrt{12}$ = 2 $\sqrt{3}$

BC =| zB - zC|=|2 $\sqrt{3}$ - 2i| = $\sqrt{12}$ +4 = $\sqrt{16}$ = 4

BC^2 = 16

$AC^2 + AB^2 = 4 + 12 = 16$

donc $BC^2 = AC^2 + AB^2$ d'après la réciproque du théorème de Pythagore ABC est rectangle en A.

3.b. Le triangle ABC est rectangle en A, donc le centre K du cercle circonscrit au triangle ABC est le milieu de [BC], soit zK l'affixe de K on a :

$$z_K = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$$

Le rayon r du cercle (G) est égal à la moitié de l'hypoténuse BC, soit r = 2.

B et C appartiennent respectivement à l'axe des réels et des imaginaires purs donc BOC est rectangle en O, O appartient donc au cercle (G) de diamètre [BC]

4. a.

$$z_D = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\left[\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right] = \sqrt{3} - i$$

b. M milieu de [AD] donc si zM est l'affixe de M :

$$z_M = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{\sqrt{3} + 3i + \sqrt{3} - i}{2} =$$

$$\frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i = z_K$$

donc M et K sont confondus.

c. [AD] et [BC] ont le même milieu K , or un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme d'ou ABDC est un parallélogramme.

De plus ABDC est tel que (AB) $\perp$ (AC) or un parallélogramme dont deux cotés consécutifs sont perpendiculaire est un rectangle donc ABDC est un rectangle.

Exercice10

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation en z :
$z^2 - 6z + 13 = 0$
2. a. Déterminer les réels b et c tels que pour tout complexe z :
$z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = (z - 3)(z^2 + bz + c)$
b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation en z :
$z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = 0$.

3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$ (unité : 2 cm)
Soient A, B, E et F les points d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + 2i, z_B = 3 - 2i, z_E = \frac{5}{4} + i\frac{\sqrt{15}}{4}, z_F = 3.$$

a. Placer les points A, B, E et F dans le plan complexe (sur papier millimétré).
b. Calculer les distances FA, FB et FE. En déduire que les points A, B et E appartiennent à un cercle (Γ) de centre F.
c. Quelle est la nature du triangle ABE ?

Correction :

1.

$$z^2 - 6z + 13 = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 13 = 36 - 52 = -16 \quad (= 16i^2)$$

$$\Delta < 0 \text{ donc deux solutions complexes conjuguées :}$$

$$z_1 = \frac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i \quad z_2 = 3 + 2i$$

$$S = \{3 - 2i; 3 + 2i\}$$

2.a.

$$(z - 3)(z^2 + bz + c) =$$

$$z^3 + bz^2 + cz - 3z^2 - 3bz - 3c =$$

$$z^3 + (b - 3)z^2 + (c - 3b)z - 3c$$

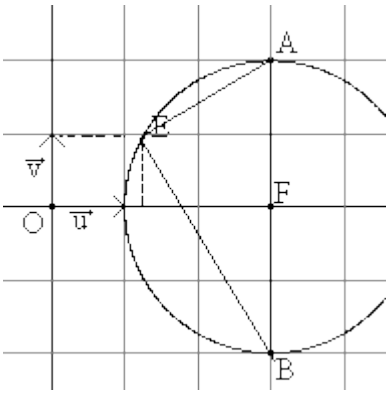
par identification (avec le polynôme $z^3 - 9z^2 + 31z - 39$) on en déduit :

$$\begin{cases} b - 3 = -9 \\ c - 3b = 31 \\ -3c = -39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6 \\ c = 13 \end{cases}$$

donc on peut en conclure que :
$z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = (z - 3)(z^2 - 6z + 13)$
2.b.
$z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = 0$ équivaut à

$(z - 3)(z^2 - 6z + 13) = 0$ équivaut à
$z - 3 + 0$ ou $z^2 - 6z + 13 = 0$ équivaut à
$z = 3$ ou $z = 3 - 2i$ ou $z = 3 + 2i$
$S = \{ 3 ; 3 - 2i ; 3 + 2i \}$

3. a



3.b.

$$AF = |z_F - z_A| = |3 - (3 + 2i)| = |-2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$BF = |z_F - z_B| = |3 - (3 - 2i)| = |2i| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$EF = |z_F - z_E| = \left|3 - \left(\frac{5}{4} + i\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\right| = \left|\frac{7}{4} - i\frac{\sqrt{15}}{4}\right|$$

$$EF = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{16} + \frac{15}{16}} = \sqrt{\frac{64}{16}} = \sqrt{4} = 2$$

AF = BF = EF = 2 donc A, B, E appartiennent au cercle (Γ) de centre F et de rayon 2.

3.c.

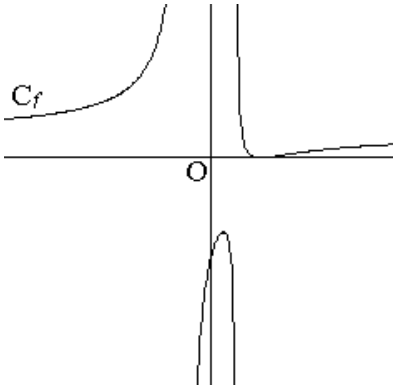
$$\left.\begin{array}{l} z_F = 3 \\ \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{3 + 2i + 3 - 2i}{2} = 3 \end{array}\right\} z_F = \frac{z_A + z_B}{2}$$

donc F milieu de [AB] or F est le centre du cercle (Γ) , [AB] diamétre du cercle (Γ), E appartient au cercle (Γ) or un triangle inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés est un triangle rectangle donc ABE est rectangle en E.

Autre méthode : calculer les distances AB, AE, BE et appliquer la réciproque du théorème de Pythagore.

Etude de fonction

Probleme(3è+4è)



On considère la fonction *f* définie sur

$]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-1}$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

d'unité graphique 1 cm

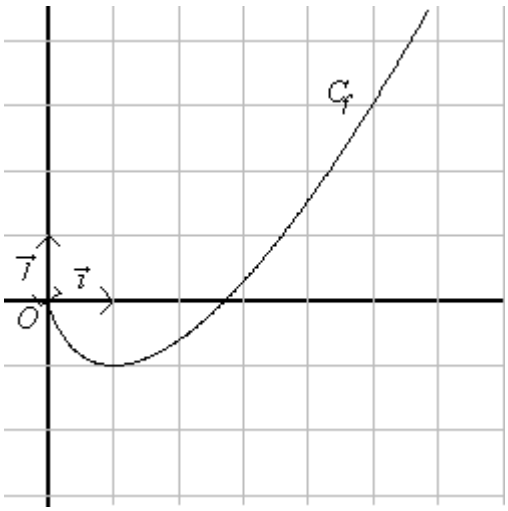
(l'allure de C_f est donnée ci-contre, à titre indicatif)

1) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de *f*, en déduire l'existence De plusieurs asymptotes dont on précisera les équations.
2) Calculer *f* '(*x*) , montrer que $f'(x)=\dfrac{2(2x^2-5x+2)}{(x^2-1)^2}$.
3) Déterminer les variations de *f* sur son ensemble de définition, on calculera les extremums et on complétera le tableau de variation avec les limites calculées au 1).
4) Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées.
5) Déterminer l'équation de la tangente T_A en la courbe au point A.
6) Construire dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm, la courbe C_f, les asymptotes trouvées dans les questions précédentes et la droite (T_A)
7) La droite T_A coupe -t- elle la courbe C_f en d'autre point que A (justification par le calcul)

II – Fonction avec logarithme népérien (4ème)

On considère la fonction f définie sur]0 ; + ∞ [par $f(x) = x \ln x - x$ et sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$

(voir figure ci-dessous)



1) Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

3) Existe-t-il un point de C_f ou la tangente en ce point admet un coefficient directeur de ½ .

4) Déterminer l'ordonnée du point d'abscisse ½ de la courbe C_f .

Correction

1) pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x^2\left[1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right]}{x^2\left[1 - \dfrac{1}{x^2}\right]} = \dfrac{1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x^2}}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right] = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[1 - \dfrac{1}{x^2}\right] = 1\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right] = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[1 - \dfrac{1}{x^2}\right] = 1\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^-} x^2 - 1 = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to-1^-} x^2 - 4x + 4 = 9\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^+} x^2 - 1 = 0^- \\ \lim\limits_{x\to-1^+} x^2 - 4x + 4 = 9\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} x^2 - 1 = 0^- \\ \lim\limits_{x\to1^-} x^2 - 4x + 4 = 1\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^+} x^2 - 1 = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to1^+} x^2 - 4x + 4 = 1\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad$	$1 \quad +\infty$
$x^2 - 1$	$+ \quad 0 \quad -$	$0 \quad +$

on en déduit l'existence de trois asymptote d'équations x = -1 , x = 1 , y = 1.

$$2)\ f'(x) = \frac{(2x-4)(x^2-1) - (x^2-4x+4)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 4x^2 + 4 - (2x^3 - 8x^2 + 8x)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 2x - 4x^2 + 4 - 2x^3 + 8x^2 - 8x}{(x^2-1)^2} = \frac{4x^2 - 10x + 4}{(x^2-1)^2} = \frac{2(2x^2 - 5x + 2)}{(x^2-1)^2}$$

8) 3) *f'(x)* est du signe de *2x² - 5x + 2* car (*x²* - 1)² > 0 sur $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$.

Δ = (-5)² - 16 = 25 – 16 = 9 > 0 donc deux racines réelles distinctes pour *2x² - 5x + 2* :

$$x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{5+3}{4} = 2$$

on en déduit que le polynôme *2x² - 5x + 2* est du signe de 2 à l'extérieur des racines et de –2 à l'intérieur . Calculons les extremums :

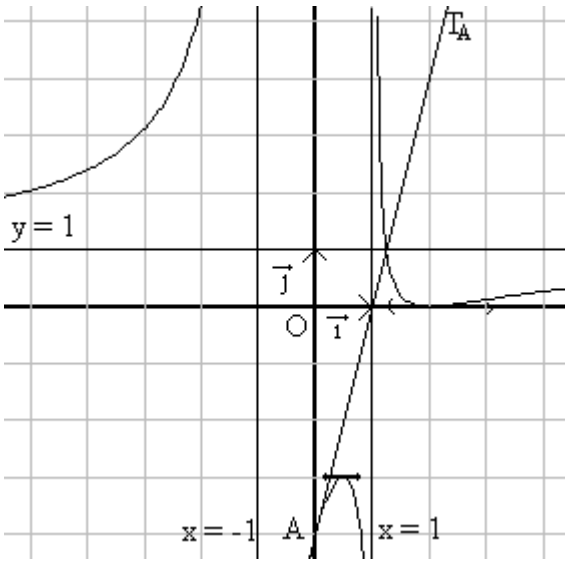
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\times\frac{1}{2} + 4}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = \frac{\frac{1}{4} - 2 + 4}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{-3}{4}} = -\frac{9}{4}\times\frac{4}{3} = -3 \quad f(2) = \frac{2^2 - 4\times2 + 4}{2^2 - 1} = \frac{0}{3} = 0$$

x	$-\infty$	-1	$1/2$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	1 ↗ $+\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	↘ -3	$-\infty$ ↗ $+\infty$	↘ 0	↗ 1

4) Le point A et le point de coordonnées : A(0 ; *f*(0)), $f(0) = \dfrac{4}{-1} = -4$ donc A(0 ; - 4)

5) Coefficient de la tangente au point A de C_f : *f '*(0) = 4/(-1)² = 4.

6)



7) $f(x) = 4x - 4 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1} = 4x - 4$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = (4x - 4)(x^2 - 1)$

$\Leftrightarrow x^2 - \cancel{4x} + \cancel{4} = 4x^3 - \cancel{4x} - 4x^2 + \cancel{4}$

$\Leftrightarrow 4x^3 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(4x - 5) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 0$ ou $4x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{5}{4}$

$f\left(\dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{25/16 - 5 + 4}{25/16 - 1} = \dfrac{9/16}{9/16} = 1$

donc la droite (T_A) coupe C_f en un autre point le point de coordonnées (5/4 ; 1).

II – Fonction avec logarithme népérien

1) $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

ln *x* > 0 si et seulement si ln *x* > ln 1 si et seulement si *x* > 1 (*f* (1) = ln1 – 1 = -1)

x	0	1	+∞
f '(*x*)	-	0	+
f(*x*)	↘	-1	↗

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x\ln x - x = 0 \Leftrightarrow x(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0$ puisque $x \neq 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e \Leftrightarrow x = e$

donc la courbe coupe l'axe des abscisse au point d'abscisse e.

3) $f'(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{1}{2}\ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln\sqrt{e} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$

Il existe un point de la courbe ou la tangente admet un coefficient directeur de ½ , c'est le point d'abscisse $\sqrt{e}$ et d'ordonnée : $f(\sqrt{e}) = \sqrt{e}\ln\left(\sqrt{e}\right) - \sqrt{e} = \dfrac{\sqrt{e}}{2}\ln e - \sqrt{e} = \dfrac{\sqrt{e}}{2} - \sqrt{e} = \dfrac{-\sqrt{e}}{2}$

4)Ordonnée du point d'abscisse ½ : *f*(1/2) = (½) ln (1/2) – ½ = - ½ ln 2 – ½