RAISONNEMENT EN ARITHMETIQUE

Sujet de la Réunion 2000:

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 5, on considère les nombres $a=\left(n^3-n^2-12n\right)$ et $b=2n^2-7n-4$.

1) Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par n-4.
2) On pose $\alpha=2n+1$ et $\beta=n+3$. On note d le PGCD de α et β.
   a) Etablir une relation entre α et β indépendante de n.
   b) Démontrer que d est un diviseur de 5.
   c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si n-2 est un multiple de 5
3) Monter que 2n+1 et n sont premiers entre eux.
4)
   a) Déterminer suivant les valeurs de n et en fonction de n le PGCD de a et b.
   b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particulier n=11 et n=12

1) La 1° question est simple, mais il faut gagner du temps : $a=n\times\left(n^2-n-12\right)$. Très souvent, les élèves calculent Delta, puis les solutions de l'équation $\left(n^2-n-12\right)=0$. Or, vous savez d'après la question qu'il faut montrer que n-4 divise a. Nécessairement (n-4) apparaît en facteur. Pour arriver à n^2, il faut multiplier par 12 et pour arriver à -12, il faut multiplier -4 par 3. La factorisation est finie, sans calcul de Delta : $a=n\times(n-4)\times(n+3)$. On agit de même pour b. Pas de calcul de Delta : On doit factoriser par (n-4). Il faut multiplier n par 2n pour obtenir $2n^2$ et $b=(n-4)\times(2n+1)$. Ceci prouve par définition que (n-4) divise a et b, ou que a et b sont divisibles par (n-4) ou encore que a et b sont des multiples de (n-4). On peut déjà remarquer que (2n+1) et (n+3) interviennent immédiatement après dans la question 2 . De même on demande de montrer ensuite que n et 2n+1 sont premiers entre eux à la question 3. Dans un exercice, il faut chercher et voir les rapports entre les questions.

2) A) L'idée naturelle est d'exprimer n en fonction de α puis de β. Mais l'erreur à ne pas commettre consiste à exprimer n en fonction de α sous la forme : $n=\frac{\alpha-1}{2}$. Vous obtiendrez immédiatement une critique : on fait de l'arithmétique et on traite d'entiers relatifs, pas de rationnels ou de fractions. Vous avez divisé un entier par 2 sans même vous assurer que 2 divise $2\alpha-1$. Pour ne pas avoir ce problème, on exprime 2n en fonction de α et 2n en fonction de β. Ce qui donne : $2n=\alpha-1$ et $2n=2\beta-6$. On obtient alors par transitivité de l'égalité : $\alpha-1=2\beta-6$, soit $2\beta-\alpha=5$.

B) Soit $d=(\alpha\wedge\beta)$; d divise α et d divise β et divise toute combinaison linéaire de α et β donc $2\beta-\alpha=5$ et d divise 5. ceci signifie que d=1 ou 5 car un pgcd est positif. Cette propriété de divisibilité est fondamentale.

C) On va voir plusieurs méthodes : Dire que α est un multiple de 5 peut se traduire par : $\exists k\in Z/\alpha=5k$ ou bien $\alpha\equiv 0[5]$ ou enfin : $5|\alpha$. De plus, quand on vous demande une équivalence, pensez à faire le sens direct puis la réciproque. Vous avez tendance à mettre des équivalences partout, sans les justifier et souvent, il y a une seule équivalence qui est fausse, mais tout le raisonnement est faux.

<u>1° méthode</u>

- Si $\exists k\in Z/\alpha=5k$ et $\exists k'\in Z/\beta=5k$ alors comme $\beta=n+3$, $n+3=5k$, donc $n-2=5k-3-2=5(k-1)$ et donc n-2 est un multiple de 5. Il faut aussi le montrer avec α ; $\alpha=2n+1$ et $\alpha=5k$, donc $2n+1=5k$. Encore une fois l'erreur à ne pas commettre serait de diviser par 2 ! Il faut faire apparaître n-2, mais multiplié par 2, cela donne 2n-4. On retranche 4 et on ajoute 4, cela ne change rien. $2n-4+4+1=5k$ et $2\times(n-2)=5k-5=5\times(k-1)$. D'après la définition, 5 divise 2(n-2), mais 2 et 5 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 5 divise (n-2), donc n-2 est un multiple de 5.

- Il faut maintenant montrer la réciproque : Si n-2 est un multiple de 5, $n=5k+2$, or, $\beta=n+3$, donc $\beta=5k+2+3=5k+5=5(k+1)$ et β est un multiple de 5. De même $\alpha=2n+1$, donc $\alpha=2(5k+2)+1=5\times 2k+5=5\times(2k+1)$ et α est un multiple de 5.

<u>2° méthode : les congruences</u>

- $\alpha\equiv 0[5]$ et $\beta\equiv 0[5]$, or $\beta=n+3$ donc $n+3\equiv 0[5]$ et $n-2=-5\equiv 0[5]$. De même $\alpha=2n+1$ donc $2n+1\equiv 0[5]$ et $2(n-2)=2n-4=-5\equiv 0[5]$, or 2 et 5 sont premiers, d'après le théorème de Gauss, $n-2\equiv 0[5]$; n-2 est bien un multiple de 5. réciproquement, si $n-2\equiv 0[5]$, $n+3=5\equiv 0[5]$ donc $\beta=n+3\equiv 0[5]$, $2n\equiv 4[5]$ et $2n+1=5\equiv 0[5]$ donc $\alpha\equiv 0[5]$

(4è maths)

- <u>3° méthode</u> :
  trouver le rapport entre n-2 ,$\alpha\equiv 0[5]$ et $\beta\equiv 0[5]$. Or $\alpha-\beta=2n+1-n-3=n-2$. Il est donc clair que si α et β sont des multiples de 5, $\alpha-\beta$ aussi et par suite n-2. Réciproquement si n-2 est un multiple de 5, $\alpha-\beta$ aussi. Or $\beta=n+3=5(k+1)$ l'est aussi, donc α aussi.

- <u>4° méthode : divisibilité</u>
  $5\,|\,n-2\Rightarrow 5\,|\,n-2+5=n+3=\beta$,
  $5\,|\,n-2, 5\,|\,n+3=\beta\Rightarrow 5\,|\,n-2+n+3=2n+1=\alpha$. Réciproque : $5\,|\,\alpha=2n+1$ et $5\,|\,\beta=n+3$ donc $5\,|\,\alpha=2n+1-n-3=n-2$. CQFD ;
  C'est peut-être la méthode la plus efficace, car l'une des seules propriétés est que si a divise 2 nombres, il divise toute combinaison linéaire de ces deux nombres.

(4èmaths)

3) 2 méthodes :

- <u>1° méthode</u>

On divise 2n+1 par n : $2n+1=2\times n+1$, puis $n=1\times n+0$, le dernier reste non nul est 1. C'est le PGCD des 2 nombres qui sont donc premiers entre eux.

- <u>2° méthode</u>

Théorème de Bézout : 2n+1-2n=1. Il existe 2 relatifs (1,-2) tels que au+bv=1, d'après ce théorème, ces 2 nombres sont premiers entre eux.

4) a) Question délicate qui intègre toutes les questions.

PGCD(a,b)=PGCD($n\times(n-4)\times(n+3),(n-4)\times(2n+1)$)= $(n-4)\times PGCD(n(n+3),(2n+1))=(n-4)\times PGCD(n\beta,\alpha)$. Or n et $\alpha=2n+1$ sont premiers entre eux. Nous allons montrer que $(n\wedge\alpha)=1\Rightarrow PGCD(n\beta,\alpha)=PGCD(\beta,\alpha)$

Soit $D_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des diviseurs de α et β et $D_{\alpha,n\beta}$ l'ensemble des diviseurs de α et $n\beta$. Si $d \in D_{\alpha,\beta}$, $d|\alpha$ et $d|\beta$, donc $d|n\beta$ et $d \in D_{n\alpha,\beta}$. On vient de montrer que $D_{\alpha,\beta} \subset D_{\alpha,n\beta}$. Montrons l'inclusion réciproque ; Soit $d \in D_{\alpha,n\beta}$, on suppose que $d > 1$ (si d=1, d appartient de manière triviale à $D_{\alpha,\beta}$). $d|\alpha$ et $d|n\beta$, donc $d|n\alpha$ et par suite $d|n(\alpha-\beta)$. Soit m le pgcd de n et d ; m divise d et n, mais d divise α, donc m divise α et n , or $(n \wedge \alpha) = 1$, donc m =1. d'après le théorème de Gauss, $d|(\alpha-\beta)$, mais d divise α ; d divise toute combinaison linéaire, donc aussi β. Par suite $d \in D_{\alpha,\beta}$ et $D_{\alpha,n\beta} \subset D_{\alpha,\beta}$. Au total, ces deux ensembles sont égaux et par suite les PGCD de ces deux ensembles sont égaux.

On a donc maintenant $PGCD(a,b) = (n-4) \times PGCD(\beta,\alpha)$; d'après 2b, $PGCD(\beta,\alpha)$ vaut 1 ou 5. D'après 1.C, ce pgcd vaut 5 si et seulement si n=5k+2. Donc si n=5k+2, $PGCD(a,b) = (n-4) \times 5$ et sinon, $PGCD(a,b) = (n-4)$.

Exercice A1

1°) Écrire l'ensemble des entiers relatifs diviseurs de 6.

2°) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise 6.

3°) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $n + 2$.

4°) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n + 1$ divise $3n - 4$.

Indication

Exercice A1

1°) $\{-6 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6\}$

2°) $n \in \{-2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 10\}$

3°) $n \in \{-2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 10\}$

4°) $n \in \{-8 ; -2 ; 0 ; 6\}$

Exercice B7

p et q désignent deux entiers naturels tels que $p^2 - 2q^2 = 1$

1°) Démontrer que p est impair.

2°) Démontrer que q est pair.

indication

Exercice B7

1°) En supposant que p est pair on aboutit à une contradiction.

2°) Justifier que q^2 est un entier pair et en déduire que q est pair.

Exercice 4

1: Démontrez que, pour tout entier naturel n: $2^{3n}-1$ est un multiple de 7.
Déduisez-en que $2^{3n+1}-2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2}-4$ est un multiple de 7.

2: Déterminez les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3: Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier: $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$. a) Si p = 3n, quel est le reste de la division de A_p par 7?
b) Démontrez que si p = 3n + 1 , alors A_p est divisible par 7.
c) Etudiez le cas où p = 3n + 2.

4: On considère les nombres *a* et *b* écrits dans le système binaire: a = 1001001000 et b = 1000100010000.
Vérifiez que ces deux nombres sont des entiers de la forme A_p.
Sont-ils divisibles par 7

Correction

1: Utilisons les congruences modulo 7. Si N est un entier relatif, et si r est le reste de la division de N par 7, on note

(N = r modulo 7) ou (N = r [7]).

Dire que N et M sont égaux modulo 7 signifie que (N-M) est divisible par 7 donc que N = M modulo 7.
Comme 2^1 = 1 modulo 7 , on a 2^2 = 4 modulo 7 et donc 2^3 = 8 = 1 modulo 7.
Pour n entier naturel quelconque, on a donc: $2^{3n} = (2^3)^n = 1^n$ = 1 modulo 7.
L'entier 2^{3n} - 1 est bien divisible par 7.
Pour k entier naturel, on a: $2^{3n+k} - 2^k = 2^k(2^{3n}-1)$. Donc c'est bien un entier divisible par 7. Pour k = 1 et k = 2, on répond alors à la question posée.

2: Tout entier naturel m est de la forme m = 3n + k , avec k =0 ou k = 1 ou k = 2. D'après la question précédente, on a:

(2^{3n} = 1 modulo 7) donc le reste de la division par 7 de 2^{3n} est 1.
(2^{3n+1} = 2 modulo 7) donc le reste de la division par 7 de 2^{3n+1} est 2.
(2^{3n+2} = 4 modulo 7) donc le reste de la division par 7 de 2^{3n+2} est 4.

Ceci peut se résumer en disant que si r est le reste de la division de N par 3, (N = 3n + r , avec r =0 ou 1 ou 2),
alors le reste de la division de 2^N par 7 est 2^r.

3: $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.
a: Si p = 3n , alors $A_p = 2^{3n} + 2^{6n} + 2^{9n}$ = 3 modulo 7.
Le reste de la division de $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$ est alors 3
b: Si p = 3n +1 $A_p = 2^{3n+1} + 2^{6n+2} + 2^{9n+3}$ = 2 +4 + 1 = 0 modulo 7.
Dans ce cas, on a bien A_p divisible par 7.
c: Si p = 3+2 alors

$A_p = 2^{3n+2} + 2^{6n+4} + 2^{9n+6} = 2^{3n+2} + 2^{3(2n+1)+1} + 2^{3(3n+2)}$ = 4 + 2 + 1 = 0 modulo 7.

Dans ce cas, A_p est aussi divisible par 7.

4: Par défintion de l'écriture en base 2, on a : $a = 2^3 + 2^6 + 2^9 = A_3$
De même, $b = 2^4 + 2^8 + 2^{12} = A_4$.
D'aprés la question prcédente, A_3 n'est pas divisible par 7 car A_3 = 3 modulo 7.
En revanche, A_4 est bien divisible par 7.

Exercice5

Les trois parties I, II et III peuvent être traitées indépendamment les une des autres.

Partie I

Soit E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10}.
Déterminez les paires { a ; b } d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1.

Partie II

1: Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
a) L'entier (n - 1)! + 1 est-il pair?
b) L'entier (n - 1)! + 1 est-il divisible par un entier naturel pair?
2: Montrez que l'entier (15 - 1)! +1 n'est pas divisible par 15.
3: L'entier (11 - 1)! +1 est-il divisible par 11?

Partie III

Soit p un entier naturel non premier (p > 1).
1: Montrez que p admet un diviseur q (1< q < p)
2: L'entier q divise-t-il l'entier (p - 1)! +1 ?
3: L'entier p divise-t-il l'entier (p - 1)! +1

Correction

THEOREME DE WILSON
p étant un entier naturel, on a:
p est premier si et seulement si p divise (p-1)! + 1

Pour la correction de cet exercice, nous allons fournir deux solutions.
Une solution purement calculatoire, en uitlisant la machine et en remerciant le ciel que l'énoncé ne demande pas de vérifier que si (23-1)!+1 est divisible ou non par 23.
Une deuxième solution qui prendra en compte les résultats de la première partie.

Partie I

Pour cette question, histoire de simplifier la recherche des paires {a ; b}, nous allons démontrer un résultat qui, à lui seul, peut être une question de Bac.

Pour p premier entier naturel, pour tout a appartenant à {1 ; 2 ; 3 ; ... ; p-1 } , s' il existe b appartenant à {1 ; 2 ; 3 ; ...; p-1} tel que ab a un reste égal à 1 dans la division euclidienne par p alors b est unique.

Effectivement, supposons qu'il existe b et c distincts dans {1 ; 2 ; 3 ; ... ; p-1} tel que ab et ac ait pour reste 1 dans la division euclidienne par p, alors ab - ac = a(b - c) est divisible par p. Comme a et (b-c) sont, en valeur absolue, inférieur à p, et que p est premier, ils sont tous les deux premiers avec p, d'où contradiction avec b et c distincts.

On peut démontrer que pour tout a, il existe bien un b appartenant à { 1 ; 2 ; 3 ; ... ; p-1} tel que ab ait pour reste 1 dans la division euclidienne par p, mais nous n'avons pas besoin de ce résultat ici.

A partir de là, comme 11 est premier, une fois une paire {a ; b} trouvée, on peut éliminer a et b de la suite des la recherche

Commençons cette recherche!

1x1 = 1 modulo 11 , donc 1 est à exclure de la recherche
2x6 = 12 = 1 modulo 11 , d'où une première paire {2 ; 6} .
3x4 = 12 = 1 modulo 11 , d'où une autre paire {3 ; 4}.
5x9 = 45 = 1 modulo 11 , d'où une autre paire {5 ; 9}.
7x8 = 56 = 1 modulo 11 , d'où la derniére paire possible {7 ; 8 }.

Remarquons que 10x10 = 100 = 1 modulo 11.

Les paires répondant à la question sont donc {2 ; 6} , {3 ; 4} , {5 ; 9} et {7 ; 8}

Partie II

1: n entier supérieur ou égal à 3
a: si n est > 2, alors (n-1)! est pair car c'est le produit 2x3x...x(n-1). Donc (n-1)!+1 n'est pas pair
b: N'étant pas pair, il ne risque pas d'être diviible par un entier pair, car sinon il serait divisible par 2.

2: a: Remarquons que 15 = 3x5 et que c'est sa décomposition en facteurs premiers. De plus,

(15-1)! = 14! = 1x2x3x4x....x10x11x12x13x14 = 10xN où N est un entier naturel
Donc (15-1)! est un entier qui fini par un "0" en écriture en base 10 , donc (15-1)!+1 fini par un "1" en écriture en base 10. Donc il n'est pas divisible par 5 et donc pas par 15.
On peut aussi remarquer que (15-1)! = 1x2x3x4x5x...x14 = 15x(1x2x4x6x7x...x13x14) = 15xN, donc que (15-1)! est divisible par 15 donc certainement pas (15-1)! + 1.

3:
Première réponse possible, on calcule (11-1)! + 1 = 10! + 1 = 3628801 et on remarque que 3628801 = 11x329891. D'où (11-1)!+1 est bien divisible 11

Deuxième réponse. On remarque que (11-1)! peut s'écrire:

(11-1)! = 10! = 1x2x3x4x5x6x7x8x9x10 = 1 x (2x6) x (3x4) x (5x9) x (7x8) x10

Comme 2x6 = 3x4 = 5x9 = 7x8 = 1 modulo 11, on en déduit que (11-1)! = 10 modulo 11 donc que (11-1)! + 1 = 11 = 0 modulo 11 et donc que (11-1)! + 1 est bien divisible par 11.

Partie III

p est un entier naturel non premier (p>1).
1)
p étant non premier, il admet un diviseur premier q inférieur à (p-1). Donc, dans (p-1)! , apparaît le facteur q et
donc (p-1)! est bien divisible par q.

2)
Réponse NON, car comme (p-1)! = q*N où N est un entier naturel, le reste de la division euclidienne de (p-1)!+1
par q est 1 et donc (p-1)!+1 n'est pas divisible par q

3)
Comme q divise p, et que q ne divise pas (p-1)!+1 , p ne risque pas de diviser

(p-1)!+1.

Remarquez que l'on vient de démontrer une partie du THEROME DE WILSON: à savoir:

Si p n'est pas premier alors (p-1)!+1 n'est pas divisible par p

ou encore

Si p divise (p-1)!+1 alors p est premier

Exercice6

Partie A

On admet que 1999 est un nombre premier.
Déterminez l'ensemble des couples (a ; b) d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1999.

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue n dans **N**: (E) : n^2 - Sn + 11994 = 0 où S est un entier naturel.
On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans *IN*.
1: Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E)?
Si oui, précisez la deuxième solution.
2: Peut-on déterminez un entier S tel que 5 soit solution de (E)?
3: Montrez que tout n solution de (E) est un diviseur de 11 994.
Déduisez-en toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

Partie C

Comment montrerait-on que 1999 est un nombre premier? Précisez le raisonnement employé

Correction

On admet que 1999 est un nombre premier

Partie A

Première remarque: Comme PGCD(a ; b) = 1999, et que (a+b) = 11 994, il faut commencer par rechercher le quotient de
11 994 par 1999, 11 994 doit être lui aussi divisible par 1999.
Or, 11 994 = 1999x6.

De plus, dire que PGCD(a;b) = 1999 revient à dire qu'il existe k et h entiers naturels premiers entre eux tels que:

a = 1999k
et
b = 1999h

Le problème revient à chercher les entiers naturels k et h premiers entre eux tels que:

(k+h)x1999 = 11 994

Donc, tels que (k+h = 6). Les seules solutions possibles sont: (1 ; 5) et (5 ; 1) car (2;4) et (3 ; 3) ne donne pas des entiers premiers entre eux.

D'où, l'ensemble des couples (a ; b) solutions:

{ (1999 ; 9995) ; (9995 ; 1999) }

Partie B

(E) : n^2 - Sn + 11994 = 0

1: On peut simplement remplacer n par 3 dans l'équation et remarquer alors que la seule valeur S possible est:

S = 4001

Comme (E) est une équation du second degré, la somme de ses racines est justement S, d'où l'autre racine:

$$X_2 = (S - 3) = 3998$$

.

2: S'il existe S tel que 5 soit solution de (E), alors on a:

$$5^2 - 5S + 11994 = 0$$

d'où

$$5(S-5) = 11994$$

Or, 11994 = 6x1999 et 1999 est premier, 11994 est non-divisible par 5.
Donc il n'existe pas S tel que 5 soit solution de (E).

3: Cela reprend le même principe que la question précédente:

Si n est solution de (E), alors on a : **n(S-n) = 11994** donc n doit être un diviseur de 11994.

Comme la décomposition de 11994 en facteurs premiers est:

11 994 = 2*3*1999

on en déduit que les diviseurs de 11994 sont:

1 ; 2 ; 3 ; 1999 ; 6 ; 3998 ; 5997 ; 11994 .

De plus, comme le produit des racines de l'équation (E) doit être 11994, on en déduit que l'ensembles des solutions possibles de (E) sont:

{ 1 ; 11994 } ou { 2 ; 5997 } ou { 3 ; 3998 } ou { 6 ; 1999}

D'où les valeurs S telles que (E) admette des solutions entiéres:

- S = 11995 , avec comme solution { 1 ; 11994}

- S = 5999 , avec comme solution { 2 ; 5997}

- S = 4001 , avec comme solution { 3 ; 3998}

- S = 2005 , avec comme solution { 6 ; 1999}

Partie C

Pour vérifier que 1999 est premier, il suffit de vérifier que 1999 n'est divisible par les nombres naturels premiers < 44

Exercice7

1: Démontrez que si trois entiers relatifs a , b et c sont tels que la somme: $a^3 + b^3 + c^3$ est divisible par 3
alors le somme (a + b + c) est aussi divisible par 3.
2: Démontrez que si ($a^3 + b^3 + c^3$) est divisible par 9 alors l'un au moins des trois nombres a , b , c est divisible par 3.
3 Déterminez une condition nécessaire et suffisante pour que la somme ($a^3 + b^3 + c^3$) soit divisible par 9

Correction

1: a, b et c sont trois entiers relatifs tels que ($a^3 + b^3 + c^3$) soit divisible par 3.
Or, si pour un entier relatif quelconque x de reste r dans le division euclidienne par 3, (x = 3N + r avec r=0 ou 1 ou 2) alors le reste de la division euclidienne de x^3par 3 est aussi r.
Pour le constater, on peut simplement remarquer que :

$$x^3 = (3N + r)^3 = 27N^3 + 27N^2r + 3Nr^2 + r^3$$

Donc le reste de x^3 est le même que r^3.
Pour r=0 , le reste est bien 0.
Pour r=1, le reste est bien 1.
Pour r=2, on a $r^3 = 8$ et le reste est bien 2.

Donc, en particulier (a^3) a le même reste que a dans la division euclidienne par 3, de même b^3 et b , et c^3 et c.
Donc ($a^3 + b^3 + c^3$) a le même reste que (a +b +c). Ils sont donc simultanement, divisible ou non par 3.

On peut arriver au même résultat en passant par les congruences. C'est plus rapide mais demande un peu plus d'habitude.

Il y a trois congruences possibles modulo 3: 0 , 1 ou 2.
Comme $0^3 = 0$ modulo 3 , $1^3 = 1$ modulo 3 , $2^3 = 2$ modulo 3 , on obtient le résultat.

Ce résultat peut se généraliser pour p premier quelconque:
Si p est premier alors (n^p = n modulo p) pour tout entier n.(theoreme)

2: Ecrivons le division euclidienne de a, b et c par 9:

$$a = 9A + U$$
$$b = 9B + V$$
$$c = 9C + W$$
avec U, V et W dans {0 ; 1 ; 2 ; .....; 8}

On remarque alors que $(a^3 + b^3 + c^3) = (U^3 + V^3 + W^3)$ modulo 9.
Or , toujours en raisonnant modulo 9, on remarque que les cubes modulo 9 sont:

- $0 = 0^3 = 3^3 = 6^3$ modulo 9
- $1 = 1^3 = 4^3 = 7^3$ modulo 9
- $8 = 2^3 = 5^3 = 8^3$ modulo 9
  On ne peut donc avoir la somme des trois cubes divisibles par 9 que si ces cubes sont égaux respectivement à 0 , 1 et 8 modulo 9.
  Donc que si un des entiers a, b ou c est le forme (9N) ou (9N+3) ou (9N+6). est donc bien divisible par 3.

3: D'après ce vient d'être dit, une condition nécessaire et suffisante pour que $(a^3 + b^3 + c^3)$ soit divisible par 9 est est que l'un de ces entiers soit divisible par 3, un autre est une reste égal à 1 dans la division euclidienne par 3 et que le troisième est un reste égal à 2 par la division euclidienne par 3.

Ce sont donc les nombres de la forme (3A, 3B+1 , 3C+2) à une permutation près

Exercice8

Pour n entier naturel non nul, on note f(n) le nombre de diviseurs entiers naturels de n, 1 et n compris.
1: Que peut-on dire de n si f(n)= 2?
2: Déterminez f(6) et f(10).
3: Décomposez 20 en produit de facteurs premiers. Montrez alors que f(20)=9.
4: Montrez que si n et m sont deux entiers naturels premiers entre eux alors f(n.m) = f(n).f(m)
5: Soit n= $P_1^a1.P_2^a2....P_k^ak$ la décomposition de n en produit de facteurs premiers. Montrez que $f(n)=(a_1 + 1).(a_2 + 1).....(a_k + 1)$
6: Que peut-on dire de n si f(n)=3

Correction

Pour n entier naturel non nul, on note f(n) le nombre d'entiers
naturels diviseurs de n , 1 et n compris.

1: Par définition, un nombre n'admettant que 1 et lui-même comme diviseur est un nombre premier. De plus, comme pour tout n entier naturel, 1 et n sont des diviseurs de n, on peut dire que f(n) est supérieur ou égal à 2 (si n>1) et que f(n) = 2 si et seulement si n est premier.

2)
Les diviseurs de 6 sont: 1 ; 2 ; 3 ; 6

Donc f(6) = 4.
De même, les diviseurs de 10 sont: 1 ; 2 ; 5 ; 10
Donc f(10)=6.

3)
La décomposition de 100 en facteurs premiers est: $100 = 2^2.5^2$.
Les diviseurs de 100 sont les nombres admettant un décomposition en facteurs premiers de la forme:

- $2^a.5^b$ avec a dans {0 ; 1 ; 2} et b dans {0 ; 1 ; 2}.
  En voici la liste:
- 1
- 2
- 4
- 5
- 25
- 10
- 50
- 100
  Ils sont bien au nombre de 9: on a bien f(100) = 9.

4
Dire que n et m sont premiers entre revient à dire que dans leurs décomposition en facteurs premiers, il n' y a par de nombre premier en commun. Ou autrement dit, si p premier divise l'un deux alors il ne divise pas l'autre.
Donc tout diviseur de (n.m) est le produit d'un diviseur de n et d'un diviseur de m, ces deux diviseurs étant premiers entre eux. Réciproquement, si k divise (n.m) alors la décomposition de k en facteur premier contient des nombres premiers diviseurs de n , et d'autres premiers diviseurs de m: On peut donc écrire k comme produit d'un diviseur de n et d'un diviseur de m.
D'où, on a bien f(n.m) = f(n).f(m) si n et m sont premiers entre eux.

5: Simple question de dénombrement!

6: Si f(n) = 3 , en utilisant la relation précédente, on a:

$f(n) = (a_1+1)(a_2+1)...(a_k + 1) = 3$.
D'où un des $a_k = 2$ et tous les autres sont égaux à 1.

Ceci signifie que n est le carré d'un nombre premier

Exercice9

1 Déterminez les couples (x ; y) d'entiers naturels tels que: $x^2 - y^2 = 1$.
2: p étant un entier naturel premier, déterminez les couples (x ; y) d'entiers naturels tels que

$x^2 - y^2 = p$

Correction

1: Comme $x^2-y^2 = (x-y)(x+y)$, on ne peut avoir l'égalité:

$$x^2-y^2 = 1$$

que si et seulement si x=1 et y=0

2:
Commençons par le cas p premier différent de 2.
On doit avoir (x - y)(x + y)= p , mais p étant premier, un des deux facteurs est 1 et l'autre p.
Comme x et y sont des entiers naturels, on doit donc avoir:

- **x + y = p**
- **x - y = 1**
  D'où x = (p+1)/2 et y = (p-1)/2. Ce sont bien deux entiers naturels car p est premier impair.

Si p=2, il n'existe pas d'entiers naturels x et y tels que $x^2-y^2 = 2$

Guesmi.B