Exercices sur les suites

EXERCICE1 correction

Ce même distributeur d'accès à Internet décide d'étudier l'évolution du nombre de ses abonnés de 1999 à 2005.

Partie A

Il a relevé dans le tableau ci-dessous l'évolution du nombre de ses abonnés en milieu urbain.

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang xi	1	2	3	4	5	6	7
Nombre yi d'abonnés en millions	0,5	3	6	8,4	12,1	15	18

1. Représenter le nuage de points A_i de coordonnées (x_i ; y_i) dans un repère orthogonal d'unités :

1 cm pour une année en abscisse. On graduera l'axe jusqu'à 12.

1 cm pour 1 million d'abonnés en ordonnée. On graduera l'axe jusqu'à 27.

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage et le placer sur le graphique.

3. On choisit pour ajustement affine du nuage la droite D passant par G et de coefficient directeur égal à 3.

a) Montrer que D a pour équation $y = 3x - 3$:

b) Construire la droite D sur le graphique précédent.

4. On suppose que le nombre d'abonnés évolue en suivant cet ajustement.

a) Déterminer par un calcul une estimation des abonnés en 2007 et vérifier la réponse graphiquement par un tracé en pointillés.

b) Déterminer par un calcul à partir de quelle année le nombre d'abonnés dépassera 32 millions.

Partie B

Après une étude, le distributeur constate que le nombre d'abonnés en milieu rural correspond à une suite géométrique dont le premier terme, correspondant à l'année 1999, est $u_1 = 9000$ et la raison est q = 1,8 (on désigne par un le nombre d'abonnés l'année de rang n).

1. a) Vérifier qu'en 2000, le nombre d'abonnés est $u_2 = 16\,200$.

b) Calculer u_3 et u_4. On arrondira à l'entier le plus proche, si nécessaire.

c) Exprimer u_n en fonction de n.
2. Déterminer à l'aide de la calculatrice à partir de quelle année le nombre d'abonnés dépassera 32 millions ? On indiquera la méthode utilisée.
3. En utilisant la partie A et la partie B, déterminer dans quel milieu (rural ou urbain) les 32 millions d'abonnés seront dépassés en premier.

EXERCICE2 correction

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.
On s'intéresse aux fonctions *f* dérivables sur [0, + ∞ [vérifiant les conditions :
(1) : pour tout réel x appartenant à [0, + ∞ [$f'(x) = 4 - (f(x))_2$
(2) : $f(0) = 0$
On admet qu'il existe une unique fonction *f* vérifiant simultanément (1) et (2).
Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.
L'annexe, sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A. Étude d'une suite
Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction *f* on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.
On obtient ainsi une suite de points notés (M_n), d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n telles que :
$x_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = x_n + 0,2$
$y_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $y_{n+1} = -0,2y_n^2 + y_n + 0,8$.
1. a) Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau de l'annexe. Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.
b) Placer, sur le graphique donné en annexe , les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.
c) D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?
2. a) Pour x réel, on pose $p(x) = -0,2\,x^2 + x + 0,8$.
Montrer que si $x \in [0; 2]$ alors $p(x) \in [0; 2]$.
b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq y_n \leq 2$.
c) Étudier le sens de variation de la suite (y_n).
d) La suite (y_n) est-elle convergente ?

Partie B. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur [0, + ∞ [par

$$g(x) = 2\,\frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}$$

et (C_g) sa courbe représentative.

1. Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).

2. a) Montrer que (C_g) admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

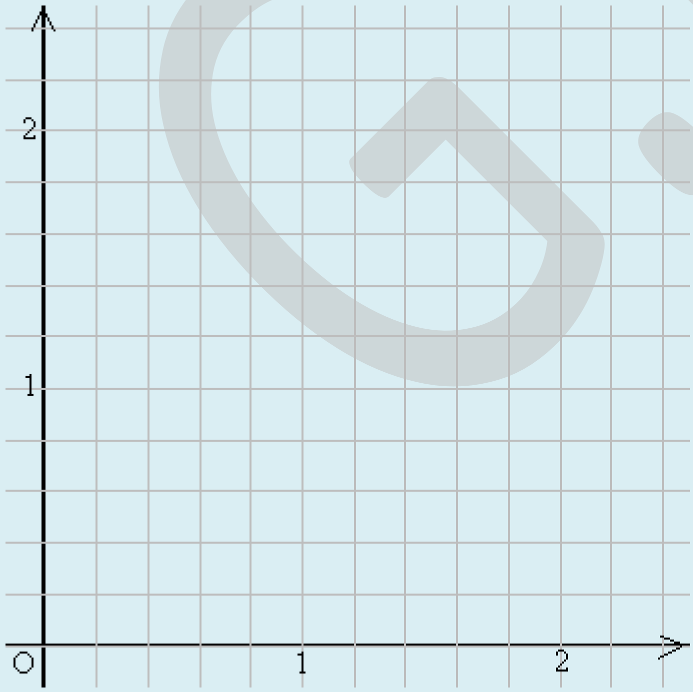
b) Étudier les variations de g sur [0, + ∞ [.

3. Déterminer l'abscisse *a* du point d'intersection de Δ et de la tangente à (Cg) à l'origine.

4. Tracer, dans le repère de l'annexe, la courbe (C_g) et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie B

Annexe

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4					
y_n	0	0,8	1,472					



EXERCICE3 correction

Partie A : étude d'une fonction

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle [0 ;+ ∞[par *f* (*x*) = *x* ln(*x* + l).

Sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ est donnée en annexe,

1. a) Montrer que la fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle [0; + ∞ [.

b) L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe (C) au point O ?

2. On pose

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$$

a) Déterminer trois réels *a, b* et *c* tels que, pour tout *x* ≠ -1 ,

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

b) Calculer I.

3. A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations

x = 0, *x* = 1 et *y* = 0.

4. Montrer que l'équation *f* (*x*) = 0,25 admet une seule solution sur l'intervalle [0;l].

On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par

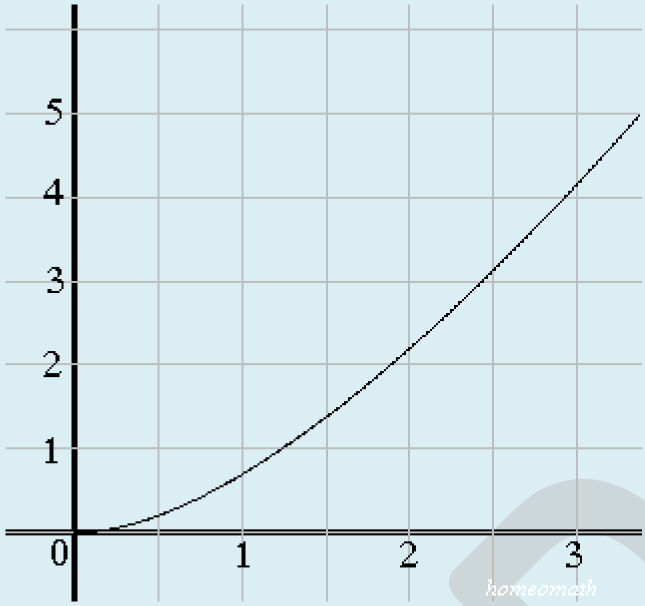
$$u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$$

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) La suite (u_n) converge-t-elle ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \le u_n \le \frac{\ln 2}{n+1}$$

En déduire la limite de la suite (u_n) .



EXERCICE4 **correction**

Un globe-trotter a parié de parcourir 5 000 km à pied.
Il peut, frais et dispos, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1 % tous les jours.
On notera d_n la distance parcourue durant le n-ième jour.
1) Calculer les distances d_1, d_2, d_3, parcourues durant les trois premiers jours.
2) Expliquer pourquoi $d_{n+1} = 0{,}99d_n$
En déduire la nature de la suite (d_n) et l'expression de d_n en fonction de n.

3) a) Calculer, en fonction de n, le nombre total L_n de kilomètres parcourus au bout de n jours
($L_n = d_1 + d_2 + ... + d_n$)
b) En déduire la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$. Le globe-trotter peut-t-il gagner ?
4) À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir 4 999 km.
On rappelle que :
La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r est :

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n\frac{u_1 + u_n}{2}$$

La somme S' des n premiers termes d'une suite géométrique (v_n) de raison q (q $\neq$ 1) est

$$S' = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = v_1\frac{1 - q^n}{1 - q}$$

EXERCICE5 correction

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$$

pour tout entier naturel n.

1) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

2) a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

2) b) Quelle est la limite de la suite (u_n).

3) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n , puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

EXERCICE6 correction

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 2n - 1$

   a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison r.

   b) Calculer en fonction de n, la somme :

   $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = e^{u_n}$

   a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique pour laquelle on précisera le premier terme v_0 et la raison q.

   b) Calculer $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$ en fonction de n

EXERCICE7 **correction**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = f(n) = 4e^{-\frac{1}{2}n}$

1.Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

2. Soit n un nombre entier naturel.

On pose :

$S_n = 4(u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n)$ et $T_n = 4(u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{n+1})$

Exprimer S_n et T_n en fonction de n.

3. Déterminer les limites S et T de S_n et T_n lorsque n tend vers $+\infty$.