Etude de fonctions(1)

Exercice1

Guesmi.B

Soit la fonction définie sur IR-$\{2\}$ par f(x)=$\frac{x^2-x+1}{x-2}$ et (C) sa courbe représentative

Dans un repère orthogonal(O ;$\vec{\imath},\vec{\jmath}$)

1)étudier les variations de f ; préciser les extremums

2)a) vérifier que $\forall x \in IR-\{2\}\ on\ a : f(x) = x+1+\frac{3}{x-2}$

b)montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes dont on précisera les équations

3)a)montrer que le point d'intersection I des deux asymptotes est un centre de symétrie de (C)

b)écrire l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 1

c)Tracer la droite T et la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

4)a) Ecrire l'équation de la courbe (C) dans le repère $(I;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

b)retrouver le centre de symétrie de la courbe(C)

Exercice2

Soit la fonction f définie sur [2,+∞[par f(x)=$\sqrt{x-2}$

(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;$\vec{\imath},\vec{\jmath}$)

1)a)Etudier la dérivabilité de f en 2 ; interpréter le résultat graphiquement

b)étudier les variations de f

2)a)déterminer $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ interpréter le résultat graphiquement

b)écrire l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 3

c)Tracer la droite T dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

3)a)tracer la courbe (P) d'équation y=x^2+2 et $x \geq 0$

b)que peut on conjecturer sur la relation de (P) et (C)

c) retrouver cette conjecture

Correction

Exercice1

1) Variation f est une fonction rationnelle donc elle est définie continue et dérivable sur IR-{2}

   $\lim_{x\to-\delta\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty \quad et \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

   $\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty \ ; \ \lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty$

   Pour tout $x \in IR - \{2\} on\ a\ f'(x) = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2} = \frac{(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x-2)2}$

x	-∞		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		+∞
f'(x)		+	0	-	‖	-	0	+	
f(x)	-∞	↗	$3-2\sqrt{3}$	↘ -∞	‖	+∞ ↘	$3+2\sqrt{3}$	↗	+∞

f présente un maximum local en $2-\sqrt{3}$ qui est $3-2\sqrt{3}$ et un minimum local en $2+\sqrt{3}$

Qui est $3+2\sqrt{3}$

2)a)$\forall x \in IR - \{2\}\ on\ a: x + 1 + \frac{3}{x-2} = \frac{xx+1)(x-2)+3}{(x-2)} = f(x)$

b)$\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty \ \ et \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc la droite (D) d'équation x=2 est une

asymptote verticale à la courbe (C)

$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(x+1)\big) = \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x-2} = 0$ de même

$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x+1)\big) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x-2} = 0$ alors la droite Δ :y=x+1 est une asymptote oblique à

(C) au voisinage de +∞ et au voisinage de -∞

3)a) soit D∩ Δ= $\{I\}$;IϵD⇔x=2 et IϵΔ⇔y=2+1=3

Donc I(2,3)

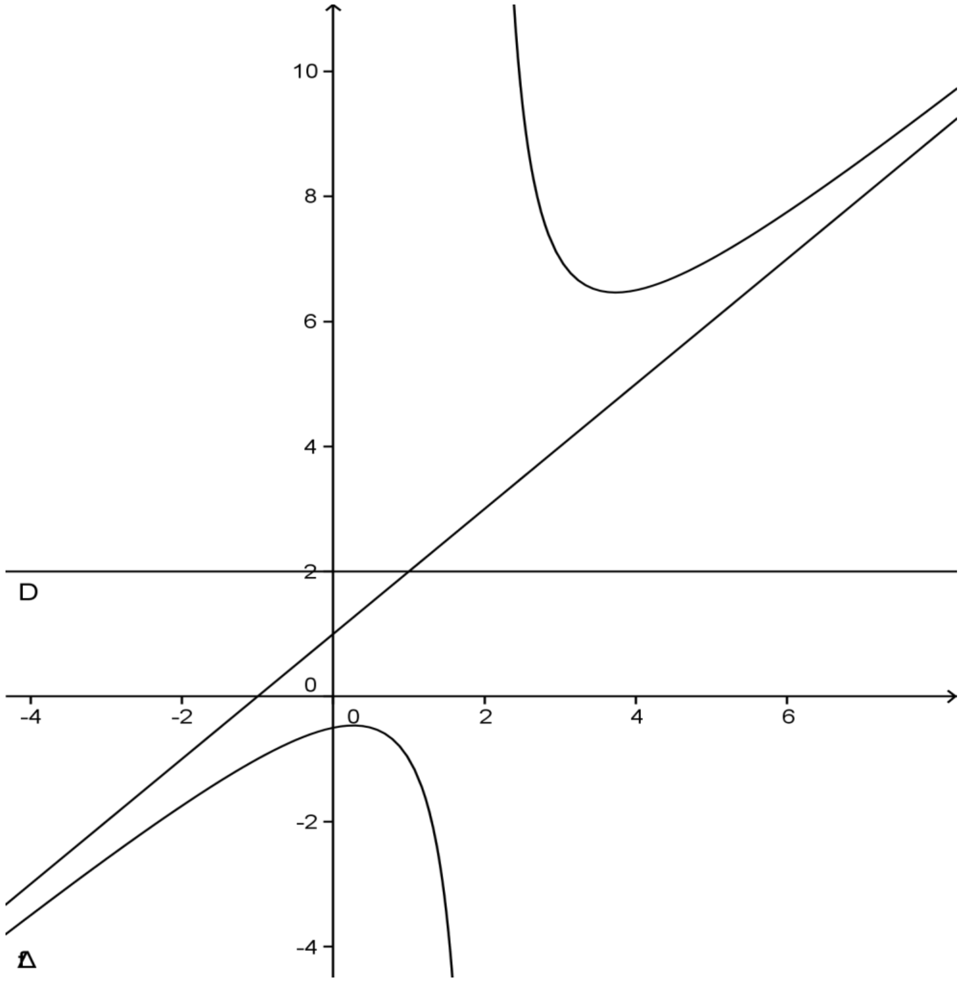
Pour xϵIR-{2} on a (4-x)ϵIR-{2} et

f(4-x)+f(x)=6=2x3 donc I(2 ;3) est un centre de symétrie de (C)

b)tangente en A(1,-1)

T :y=f'(1)(x-1)+f(1) ⇔ T :y=-2x+1

c)La courbe (C)



4)a)Equation de la courbe (C) dans le repère (I,$\vec{\imath}, \vec{\jmath}$)

Si M(x ;y) dans le repère (O,$\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) et M(X ;Y) dans le repere (I,$\vec{\imath}, \vec{\jmath}$)

On a :$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OM}$

Donc X=x-2 et Y=y-3

M$\epsilon(C)$ ⇔y=x+1+$\frac{3}{x-2}$ ⇔(Y+3)=(X+2)+1+$\frac{3}{(x+2)-2}$

⇔$Y = X + \frac{3}{X} \Leftrightarrow$ *dans le repere* $(I;\vec{\imath};\vec{\jmath})$*la fonction* $g(X) = X + \frac{3}{X}$ est impaire donc I est un centre de symétrie la courbe (C)

Exercice2

1)a)f est définie continue sur [2 ;+∞[et dérivable sur]2 ;+∞[

Dérivabilité à droite en 2 on a : $\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=+\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 2 et donc la courbe (C) admet

Une demi tangente verticale au point A(2 ;0)

b)pour $\forall x\in]2;+\infty[\ \ on\ a: f^{'}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}>0\ \ et\ \ \lim_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$

2)a)$\lim_{x\to +\infty}f(x)=+\infty\ \ et\ \ \lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses

Au voisinage de $+\infty$

b)la tangente T à (C) au point A(3,1) est T :y=$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

c) voir le graphique

b)l'mage de (C) par la symétrie S_{Δ} d'axe $\Delta: y=x\ \ est\ incluse\ dans\ (P)$

c)soit M(x ;y) un point du plan M'(x',y')=$S_{\Delta}(M)$ on a : x'=y et y'=x

Mϵ(C) donc $(x\geq 2\ et\ y=\sqrt{x-2}\ \ )$

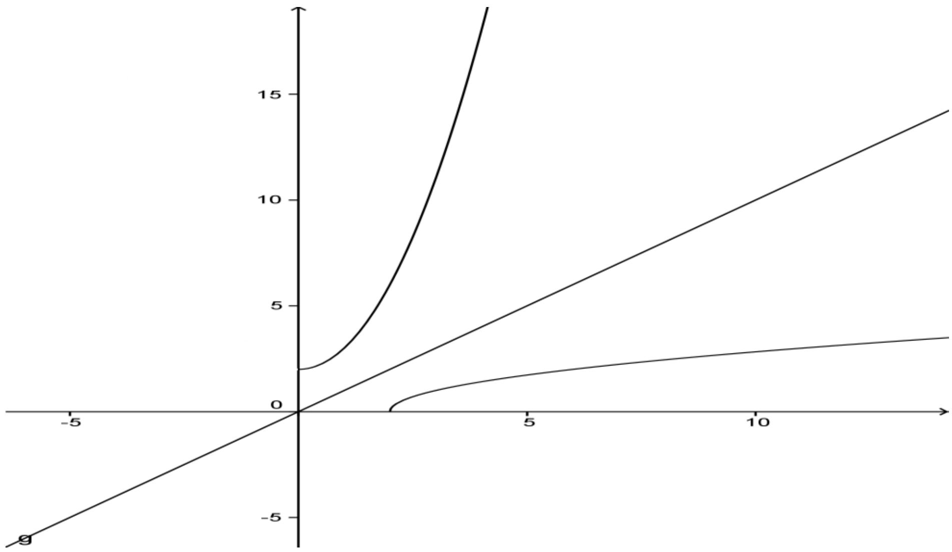
$\Rightarrow y^2=x-2\ et\ y\geq 0$

$\Rightarrow\ x=y^2 et\ y\geq 0$

$\Rightarrow y^{'}=x'^2+2\ et\ x'\geq 0$

$\Rightarrow$ M'ϵ(P)

Par suite $S_{\Delta}(C)\subset(P)$



15
10
5
0
-5
5
10
-5