# EXERCICE1 correction guesmi.B

Dans un village de vacances, trois stages sont proposés aux adultes et aux enfants. Ils ont lieu dans la même plage horaire ; leurs thèmes sont : la magie, le théâtre et la photo numérique.

150 personnes dont 90 adultes se sont inscrites à l'un de ces stages.

Parmi les 150 personnes inscrites, on relève que :

o la magie a été choisie par la moitié des enfants et 20% des adultes ;

o 27 adultes ont opté pour la photo numérique ainsi que 10% des enfants.

**1.** Recopier et compléter le tableau suivant :

| | Magie | Théatre | Photo numérique | Total |
|---|---|---|---|---|
| Adultes | | | | |
| Enfants | | | | |
| Total | | | | 150 |

On appelle au hasard une personne qui s'est inscrite à un stage. On pourra utiliser les notations suivantes :

o A l'événement " la personne appelée est un adulte " ;

o M l'événement " la personne appelée a choisi la magie " ;

o T l'événement " la personne appelée a choisi le théâtre " ;

o N l'événement " la personne appelée a choisi la photo numérique ".

**2. a)** Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un enfant ?

**b)** Quelle est la probabilité que la personne appelée ait choisi la photo sachant que c'est un adulte ?

**c)** Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un adulte ayant choisi le théâtre ?

**3.** Montrer que la probabilité que la personne appelée ait choisi la magie est 0,32.

**4.** Le directeur du village désigne une personne ayant choisi la magie. Il dit qu'il y a deux chances sur trois pour que ce soit un enfant. A-t-il raison ? Justifier votre réponse.

**5.** On choisit, parmi les personnes qui désirent suivre un stage, trois personnes au hasard. On assimile ce choix à un tirage avec remise. Quelle est la probabilité qu'une seule personne ait choisi la magie (on donnera une valeur arrondie au centième)

## EXERCICE2 correction

Madame beta fait un très grand élevage de chats de races. Elle possède des Siamois, des Birmans et des Abyssins.
Le printemps dernier, pratiquement toutes ses femelles ont eu des bébés et Madame beta a mis une annonce pour signaler qu'elle avait une très grande quantité de petits chatons à vendre. On sait que :

- 32% des chatons sont des Siamois,
- 54% des chatons sont des Abyssins et le reste est constitué de Birmans.
- Parmi les Siamois, 54% sont des mâles.
- 66% des Abyssins sont des femelles.
- Il y a au total 40,96% de chatons mâles.

Un petit garçon, Rida, vient acheter un chaton avec sa mère. Comme ils sont tous adorables et qu'il n'arrive pas à choisir, rida décide de le prendre au hasard. On désigne par S, B, A, M et F les événements suivants :
S : " Rida achète un chaton Siamois ".
B : " Rida achète un chaton Birman ".
A : " Rida achète un chaton Abyssin ".
M : " Rida achète un chaton mâle ".
F : " Rida achète un chaton femelle ".
**1. a)** Traduire les données de l'énoncé en langage de probabilités.
**b)** Construire un arbre illustrant la situation, en indiquant sur chaque branche les probabilités données dans l'énoncé. Les probabilités manquantes seront calculées dans les questions ultérieures,
**2. a)** Déterminer la probabilité que Rida achète un chaton mâle Siamois.
**b)** Calculer $p(M \cap A)$ et interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.
**c)** En déduire que la probabilité que Rida achète un chaton mâle Birman est égale à 0,0532.
**d)** Le chaton acheté par Rida est un Birman. Quelle est la probabilité que ce soit un mâle ?
**3.** Finalement, Rida est tellement séduit par ces chatons qu'il décide d'en acheter trois, toujours au hasard. On assimilera ces achats à des tirages successifs avec remise. Quelle est la probabilité qu'il y ait, parmi ces trois chatons, exactement deux mâles Birmans
(le résultat sera arrondi à $10^{-3}$ ).

Guesmi

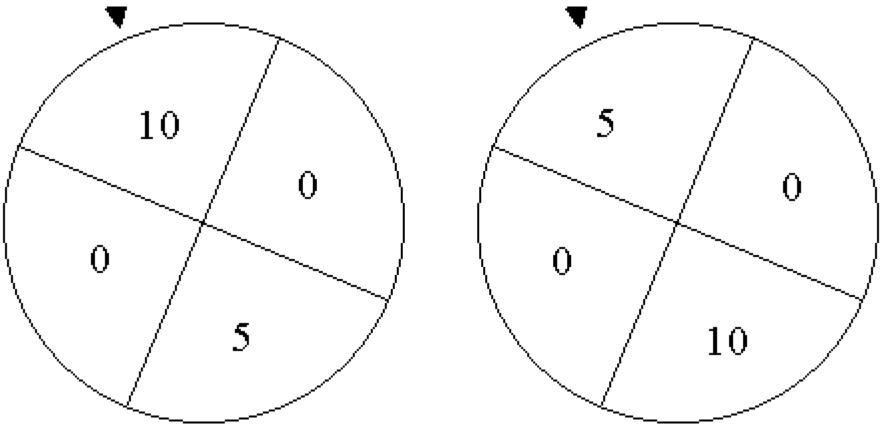
**EXERCICE3** [correction]

Pour la fête de l'école, une association propose une loterie selon le principe suivant :

- Le joueur mise 10 Dinars.
- Il fait tourner deux roues identiques chacune s'arrêtant devant un repère.

Chaque roue est divisée en quatre quartiers sur lesquels sont indiqués les gains en euros : 10 ; 0 ; 5 ; 0. Tous les quartiers ont la même probabilité de s'arrêter devant le repère.

La gain obtenu par le joueur est égal à la somme des gains indiqués sur les quartiers sur lesquels se sont arrêtées les roues.




roue n° 1 roue n° 2

Dans l'exemple ci-dessus, la partie assure au joueur un gain de 15 Dinars.

**1.** Étude du gain d'un joueur pour une mise de 10 Dinars.

On nomme G la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain du joueur en Dinars.

**a)** Reproduire et compléter le tableau suivant donnant les valeurs prises par la variable aléatoire G selon les quartiers sur lesquels se sont arrêtées les roues :

| roue n° 1 / roue n° 2 | 10 | 0 | 5 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| 10 | | | | |
| 0 | | | | |
| 5 | | | | |
| 0 | | | | |

**b)** Prouver que la probabilité que le joueur obtienne un gain supérieur ou égal à sa mise est 50 %.

**c)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

**d)** Calculer la probabilité, notée p(G > 10), qu'un joueur obtienne un gain strictement supérieur à sa mise.

**e)** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire G, puis donner son interprétation.

**2.** Étude du bénéfice de l'association pour une mise de m Dinars.

On suppose dans cette question que la mise du joueur est m Dinars.

On note B la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le bénéfice (positif ou négatif) réalisé par l'association, c'est-à-dire la différence entre la mise qu'elle a encaissée et le gain éventuel qu'elle a reversé au joueur.

**a)** Exprimer en fonction de m l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.

**b)** Déterminer m pour que l'espérance de bénéfice de l'association soit d'au moins 5 D.

## EXERCICE4 correction

Un jeu consiste à jeter un dé de forme tétraédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 4.

Ce dé est pipé de telle façon que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro porté par cette face.

On note $p_i$, la probabilité d'obtenir le nombre *i* pour $i \in \{l;2;3;4\}$.

**1.** Exprimer $p_i$, en fonction de i puis vérifier que la probabilité d'obtenir un nombre pair est 3/5.

**2.** On jette le dé. Si le nombre obtenu est pair, la somme reçue par le joueur est égale à sa mise augmentée de 10 %. Si le nombre obtenu est impair, le joueur reçoit sa mise diminuée de 11 Dinars. La mise minimale est de 20 Dinars.

Un joueur décide de faire trois parties successives :

- il mise cent Dinars pour la première partie ;

- pour la seconde partie il mise la somme reçue à l'issue de la première partie ;
- pour la troisième partie il mise la somme reçue à l'issue de la seconde partie.

**a)** Montrer que, pour ce joueur, les montants possibles de la somme reçue à l'issue des trois parties sont, arrondies à un Dinar près, 133 Dinars, 110D , 109 D, 108 Dinar, 88 Dinars, 87 Dinars, 86 Dinars et 67 Dinars.

**b)** Montrer que la probabilité de gagner 110 Dinars est égale à 18/125

**c)** Calculer la probabilité de chacun des quatre événements qui conduisent à une perte.

**d)** Montrer que la probabilité, pour ce joueur, de gagner de l'argent est supérieure à celle d'en perdre.

Indication : pour la question 2, on pourra s'aider d'un arbre.

## EXERCICE5 correction

On a posé à 1000 personnes la question suivante : « Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ».
Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant.

| Nombre de retards le 1er mois / Nombre de retards le 2ème mois | 0 | 1 | 2 ou plus | *Total* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 262 | 212 | 73 | 547 |
| 1 | 250 | 73 | 23 | 346 |
| 2 ou plus | 60 | 33 | 14 | 107 |
| *Total* | 572 | 318 | 110 | 1000 |

**1.**On choisit au hasard un individu de cette population.
**a)** Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois.
**b)** Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.
**2.** On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre n de mois (n entier naturel non nul).
On fait les hypothèses suivantes :
- si l'individu n'a pas eu de retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois n + 1 est 0,46.
- si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois n + 1 est 0,66.
- si l'individu a eu deux retards ou plus le mois , la probabilité de ne pas en avoir le mois n + 1 est encore 0,66.

On note $A_n$ l'événement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n »,
$B_n$ l'événement « l'individu a eu exactement un retard le mois n », $C_n$ l'événement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois n ».
Les probabilités des événements $A_n$, $B_n$, $C_n$ sont notées respectivement $p_n$, $q_n$, $r_n$. a)
**a)** Pour le premier mois ( n = 1), les probabilités $p_1$, $q_1$et $r_1$ sont obtenues à l'aide

du tableau précédent. Déterminer les probabilités $p_1$, $q_1$et $r_1$
**b)** Exprimer $p_{n+1}$ en fonction de $p_n$, $q_n$ et $r_n$ .On pourra s'aider d'un arbre.
**c)** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = - 0,2\ p_n + 0,66$.
**d)** Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0,55$.
Démontrer que $(u_n)$ est une suite géométrique dont on donnera la raison.
**e)** Déterminer lim $u_n$. En déduire lim $p_n$

## EXERCICE6 correction

Voici les premiers vers d'un poème de Jacques Prévert : " le cancre ".

Il dit non avec la tête
Mais il dit oui avec le coeur
Il dit oui à ce qu'il aime
Il dit non au professeur

Chacun des 26 mots de ces vers est inscrit sur une carte. On obtient ainsi la répartition suivante :

| mots | il | dit | non | avec | la | tête | mais | oui | le | cœur | à | ce | qu | aime | au | professeur |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| effectif | 5 | 4 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

On a ainsi un jeu de 26 cars.
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
1. On tire successivement trois cartes au hasard parmi les 26.
a. Les tirages s'effectuent sans remise, calculer la probabilité d'obtenir dans l'ordre " il dit non ".
b. Les tirages s'effectuent avec remise, calculer la probabilité d' obtenir exactement une fois le mot "non".
2. On tire au hasard et simultanément trois cartes au hasard parmi les 26.
a. Calculer la probabilité d'obtenir trois verbes.
b. Calculer la probabilité d'obtenir ensemble les trois mots "il", "dit" et "non".
c. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois le mot "non".

## EXERCICE7 correction

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
Une urne contient des jetons bleus, des jetons blancs et des jetons rouges.

10% des jetons sont bleus et il y a trois fois plus de jetons blancs que de jetons bleus.
Un joueur tire un jeton au hasard.
S'il est rouge, il remporte le gain de base.
S'il est blanc, il remporte le carré du gain de base.
S'il est bleu, il perd le cube du gain de base.
1. On suppose que le gain de base est 2 Dinars.
a. Déterminer la loi de probabilité sur l'ensemble des résultats possibles.
b. Calculer le gain moyen que l'on peut espérer réaliser sur un grand nombre de tirages.
2. On cherche à déterminer la valeur $g_0$ du gain de base, telle que le gain moyen
réalisé sur un grand nombre de tirages soit maximal. Le résultat sera arrondi au centime De Dinar.
Soit $x$ le gain de base en Dinar.
a. Montrer que le problème posé revient à étudier les éventuels extremums de la fonction $f$ définie sur $[0 ; +\infty[$ par
$f(x) = -0,1x^3 + 0,3x^2 + 0,6x$.
b. On désigne par $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ . Déterminer $f'(x)$.
c. En déduire le sens de variation de $f$ sur $[0 ; +\infty[$.
d. Conclure sur le problème posé.

## EXERCICE8 correction

On propose aux élèves, Abdou, Ala et Otail de répondre à un Q.C.M. comportant quatre questions dont voici le barème et les instructions :
Pour chaque question, une seule des quatre propositions A, B, C ou D est exacte.
L'élève recopie sur sa feuille une grille de réponses présentée comme ci-dessous :

| Question. | Réponse A,B,C,D |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |

Une bonne réponse rapporte 1 point ; une mauvaise réponse enlève 0,5 point.
L’absence de réponse n’apporte ni n’enlève aucun point.
Si le total de points est négatif, la note globale attribuée à l’exercice est 0.
Les trois candidats répondent correctement à la première question.
1. Abdou choisit de ne pas répondre à la question n°2 et de donner une réponse
à chacune des deux dernières questions, en choisissant au hasard et de façon
équiprobable, l’une des quatre réponses proposées.
a. Quelles notes peut-il obtenir à ce Q.C.M. ?
b. Combien de grilles différentes peut-il remplir ?
c. Quelle probabilité a-t-il de ne faire aucune faute ?
d. Quelle probabilité a-t-il de faire deux fautes ?
e. Construire un tableau qui associe, à chaque total de points, sa probabilité.
En déduire l’espérance mathématique de la note obtenue.
2. Ala adopte la stratégie de donner une réponse à chacune des trois dernières
questions en choisissant au hasard et de façon équiprobable l’une des quatre réponses proposées.
a. Quelles notes peut-il obtenir à ce Q.C.M.?
b. Combien de grilles différentes peut-il remplir?
c. Quelle probabilité a-t-il de ne faire aucune faute?
d. Quelle probabilité a-t-il de faire trois fautes?
e. Construire un tableau qui associe, à chaque total de points, sa probabilité.
En déduire l’espérance mathématique de la note obtenue.
3. Outail choisit de ne répondre à aucune des trois dernières questions.
Classer les stratégies de Abdou, Ala et Outail.

## EXERCICE9 correction

Une résidence de vacances propose deux types d’appartements (studio et deux pièces)
à louer à la semaine. L’appartement doit être restitué parfaitement propre en

fin de séjour.
Le locataire peut décider de le nettoyer lui-même ou peut choisir l'une des deux formules
d'entretien suivantes : la formule Simple ( nettoyage de l'appartement en fin
de séjour par le personnel d'entretien) ou la formule Confort (nettoyage quotidien
du logement durant la semaine et nettoyage complet en fin de séjour par le personnel
d'entretien).
Le gestionnaire a constaté que :
- 60 % des locataires optent pour un studio et parmi ceux-ci 20 % ne souscrivent
aucune formule d'entretien ;
- La formule Simple a beaucoup de succès : elle est choisie par 45 % des locataires
de Studio et par 55% des locataires de deux-pièces ;
- 18 % des locataires ne souscrivent aucune formule.
On rencontre un résident au hasard.
Soit S l'évènement « Le résident a loué un studio »
A l'évènement « Le résident a souscrit la formule Simple »
B l'évènement « Le résident a souscrit la formule Confort »
R l'évènement « Le résident n'a souscrit aucune formule d'entretien »
1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a. Quelle est la probabilité que le résident ait loué un deux-pièces?
b. Calculer $P_S(B)$.
3. a. Calculer $P(R \cap S)$ ; en déduire $P(R \cap \overline{S})$.
b. Le résident a loué un deux-pièces. Montrer que la probabilité qu'il assure lui-même le nettoyage de son appartement est 0,15.
4. Le gestionnaire affirme que près de la moitié des résidents choisit la formule
Simple. Présenter les calculs qui justifient son affirmation.
5. La location d'un studio à la semaine coûte 350 Dinar, celle d'un deux-pièces
480 Dinar
La formule Simple coûte 20 Dinars et la formule Confort 40 D

Soit L le coût de la semaine (loyer et entretien) ; il prend différentes valeurs $L_i$ .

On désigne par $p_i$ , la probabilité que le coût de la semaine soit égal à $L_i$ .

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

| $L_i$ | 350 | 370 | 390 | 480 | 500 | 520 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,12 | | 0,21 | | | 0,12 |

b. Calculer l'espérance de L. En donner une interprétation.

## EXERCICE10 correction

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact
des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.
Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt
jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles
sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être
contrôlé est égale à p.
Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent Dinar Tunisien

**Mohamed El Bouazizi** fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude.

Soit $X_i$ la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Mohamed est contrôlé au i-ème
trajet et la valeur 0 sinon.

Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2 + X_3 + .. +X_{40}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Dans cette partie on suppose que p = 1/20

a. Calculer l'espérance mathématique de X.

b. Calculer les probabilités P(X = 0), P(X = 1) et P(X = 2).

c. Calculer à $10^{-4}$ près la probabilité pour que Mohamed soit contrôlé au plus
deux fois.

3. Soit Z la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé
par le fraudeur.

Justifier l'égalité Z = 400-100X puis calculer l'espérance mathématique de Z pour p = 1/5

4. On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Mohamed subisse
au moins trois contrôles soit supérieure à 99%.

a. Démontrer que $P(X \leq 2) = (1-p)^{38}(741p^2 + 38p + 1)$.

b. Soit $f$ la fonction définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = (1-x)^{38}(741x^2 + 38x + 1)$.

Montrer que $f$ est strictement décroissante sur [0 ; 1] et qu'il existe un unique réel $x_0$ appartenant à l'intervalle [0 ; 1] tel que $f(x_0) = 0,01$.

Déterminer l'entier naturel n tel que n/100 < x0 < (n +1)/100

.

c. En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité
que Mohamed subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99%. (On exprimera p en fonction de $x_0$).

## EXERCICE11 correction

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle [0 ; + ∞ [ : la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est :

$$p([0;t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50% d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser p( [0 ; 200[ ) = 0,5.

**1)** Montrer que $\lambda$ = ( ln2) /200.

**2)** Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.

**3)** On admet que la durée de vie moyenne $d_m$ de ces composant est la limite quand A tend vers + $\infty$ de

$$\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx$$ .

**a)** Montrer que

$$\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$$

**b)** En déduire $d_m$ : on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

## EXERCICE12 correction

1. Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.

On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté *a*, porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note *b* le numéro du jeton tiré.

Soit (O; $\vec{i}$ ; $\vec{j}$; $\vec{k}$) un repère orthonormé de l'espace.

On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (a; -5; 1 - a) et (1+b; 1 ;b).

Montrer que la probabilité que ces vecteurs soient orthogonaux est égale à ¼ .

2. Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la première question.

Si A obtient des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, A est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.
Si A obtient des vecteurs non orthogonaux et B des vecteurs orthogonaux, B est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.
Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie et le jeu continue.

Pour tout entier n, on désigne par :

- $A_n$ l'événement : "A gagne la n-ième partie"
- $B_n$ l'événement : "B gagne la n-ième partie"
- $C_n$ l'événement : "le jeu continue après la n-ième partie"

*a*. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$, et $p(C_1)$.

*b*. Exprimer p($C_{n+1}$) en fonction de p($C_n$) et montrer que : $p(C_n) = \left(\frac{5}{8}\right)^n$
Exprimer p($A_{n+1}$) en fonction de p($C_n$) et en déduire que :

$$p(A_n) = \frac{3}{16}\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$$

3. *a*. Déterminer la limite de p($A_n$) quand n tend vers + ∞ .
*b*. Déterminer le plus petit entier n tel que p($A_n$) soit inférieur ou égal à 0,01.

## EXERCICE13 correction

Une association de randonneurs organise un repas. Elle fixe le prix de la manière suivante :
- le tarif pour un enfant âgé de 10 ans ou moins est de 5 D;
- le tarif pour un jeune âgé de 11 à 16 ans est de 8 D;
- dans les autres cas le tarif est de 10 D

De plus, tout membre de l'association bénéficie d'une réduction de 20 % appliquée au tarif le concernant. Ainsi, un membre âgé de 11 à 16ans paiera 6,4 D.
Les participants au repas, au nombre de 600, sont répartis selon le tableau ci-dessous :

| Participant | 10 ans ou moins | entre 11 et 16 ans | plus de 16ans | total |
|---|---|---|---|---|
| membre | 50 | 40 | 110 | 200 |
| non-membre | 110 | 100 | 190 | 400 |
| total | 160 | 140 | 300 | 600 |

Partie A
On choisit au hasard une personne ayant participé au repas.
1. Quelle est la probabilité qu'elle soit membre de l'association ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle paye plus de 7 D ?
3. On considère la variable aléatoire X égale au prix du repas pour un participant choisi au hasard. Vérifier que la probabilité pour que X prenne la valeur 6,4 est égale à 1/15.
4. Déterminer les valeurs prises par X, puis donner la loi de probabilité de X.
5. Déterminer l'espérance mathématique de X, notée E(X) ( calculer la valeur exacte sous forme d'une fraction, puis une valeur décimale approchée à 0,01 près ).

**Partie B**
Calculer la recette totale perçu par l'association à l'occasion de ce repas.