EXERCICES DE DENOMBREMENT

EXERCICE1

Dans chaque cas une des réponses au moins est exacte.

1. Le nombre 0 ! :
   a) est égal à 0
)b est égal à 1
   c) n'a pas été défini

2. Le nombre de listes à k éléments distincts ou non, dans un ensemble à p éléments :
   a) est égal à k^p
   b) est égal à p^k
   c) est égal à A_p^k

3. n et p sont deux nombres entiers naturels non nuls et p est inférieur ou égal à n.
   a) On a toujours $A_n^p \leqslant n^p$
   b) On a toujours $\binom{n}{p} \leqslant A_n^p$
   c) Il n'y a pas de relation générale entre A_n^p et n^p

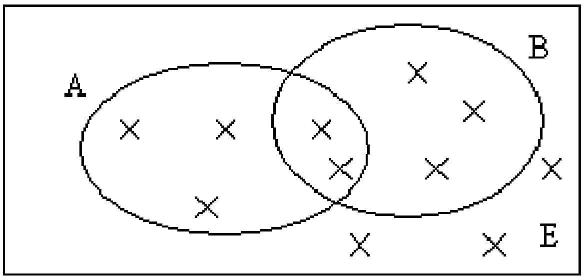
4. L'expression $\dfrac{n!}{2!(n-2)!}$
   a) est la valeur de $\binom{n}{2}$
   b) est la valeur de $\binom{n}{n-2}$
   c) est la valeur de A_n^{n-2}

5. On place 5 croix et 5 ronds dans une liste de 10 caractères. De combien de manières différentes peut-on placer ces éléments :
   a) 2^{10}
   b) A_{10}^5
   c) $\binom{10}{5}$

6. Le nombre 4! représente :
   a) le nombre de classements possibles dans un ensemble à 4 éléments.
   b) le nombre des permutations possibles dans un ensemble à 4 éléments.
   c) le nombre des arrangements des 4 éléments dans un ensemble de cardinal égal à 4.

EXERCICE 2

On a représenté sur le diagramme ci-dessous un ensemble E et deux de ses sous-ensembles A et B (chaque élément de E est représenté par une croix).



1. Calculer card(A), card(B), card(A ∩ B), card(A ∪ B), card(E).

2. Quelle égalité lie les quatre premiers nombres ?

EXERCICE 3

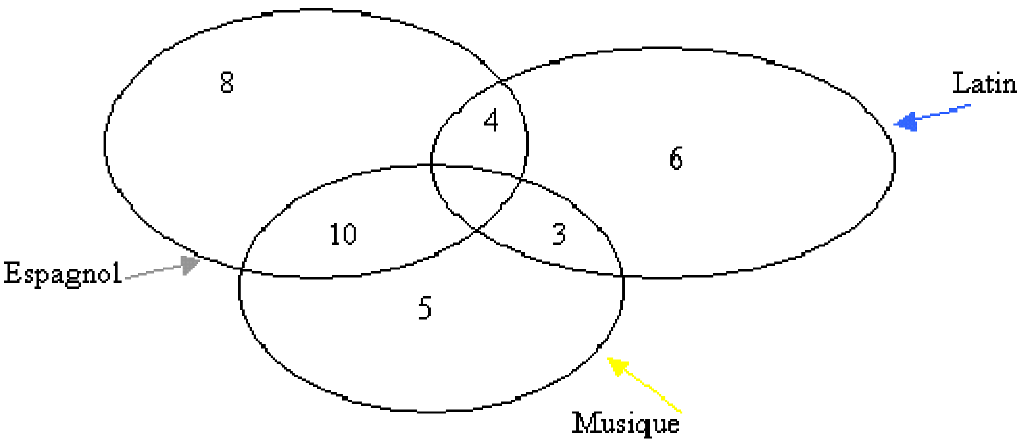
Une urne contient 5 boules rouges, 4 noires, 3 vertes. On tire trois boules dans cette urne, successivement, en remettant chaque boule tirée dans l'urne avant de prendre les suivantes.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?

2. Calculer la probabilité :
   a) d'obtenir trois boules rouges ;
   b) d'obtenir deux boules rouges exactement ;
   c) d'obtenir au moins une boule rouge ;
   d) d'obtenir deux boules vertes et une noire ;
   e) d'obtenir trois boules de la même couleur ;
   f) d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes.

EXERCICE 4

Trois options sont offertes aux élèves d'une classe : espagnol, latin, musique. Chaque élève choisit une ou deux options. Le schéma ci-dessous indique le nombre d'élèves pour chaque combinaison d'options possible.



On choisit un élève au hasard dans cette classe.
Déterminer la probabilité des événements suivants :
1. l'élève étudie l'espagnol,

2. l'élève étudie uniquement l'espagnol,
3. l'élève étudie l'espagnol et le latin,
4. l'élève étudie l'espagnol ou le latin,
5. l'élève étudie uniquement une des deux langues : espagnol ou latin (il peut éventuellement faire aussi de la musique),
6. l'élève étudie une seule des trois options.

EXERCICE 5

Une urne contient cinq boules blanches et trois boules rouges indiscernables au toucher.

1. On tire successivement sans remise trois boules dans l'urne.
   a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules rouges ?
   c) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?

2. Reprendre la première question, en supposant que les trois boules sont tirées simultanément. Comparer les résultats obtenus dans les deux questions.

EXERCICE 6

On rappelle qu'une anagramme d'un mot est un mot qui contient les mêmes lettres (éventuellement répétées le même nombre de fois). Par exemple REVISE et SERVIE sont des anagrammes de EVIERS, on considère que ESEIVR en est une autre, bien que ce mot n'ait aucun sens.

1. Combien CHERS a-t-il d'anagrammes ?

2. Combien CHERE a-t-il d'anagrammes ?

3. Combien CHERCHER a-t-il d'anagrammes ?

4. Combien RECHERCHER a-t-il d'anagrammes ?

EXERCICE 7

Une agence de voyages propose un circuit touristique comprenant quatre des douze capitales de la Communauté économique européenne (CEE).
Pour définir un circuit, on suppose que chaque capitale n'est visitée qu'une fois et on tient compte de l'ordre de visite de ces capitales ; par exemple, le circuit : " Paris, Madrid, Rome, Athènes " diffère du circuit : " Athènes, Rome, Paris, Madrid ".

1. Combien y a-t-il de circuits différents ?
Dans la suite, on suppose que chaque capitale a la même probabilité d'être choisie.

2. Calculer la probabilité de l'événement suivant : le circuit commence à Paris. (Le résultat de cette question sera donné sous forme de fraction irréductible).

3. Si le circuit commence à Paris, quelle est la probabilité pour que Madrid et Rome fassent partie du circuit ? (Ce résultat sera donné sous forme de fraction irréductible).

EXERCICE8

a. Combien de mots de passe de 8 symboles peut-on créer avec 66 caractères ?
b. Si, dans un pays, les voitures ont des plaques avec deux lettres (leur alphabet a 26 caractères) et ensuite trois chiffres, combien de plaques possibles y a-t-il

EXERCICE9

Un professeur dispose de 32 livres sur un rayon de sa bibliothèque. 23 d'entre eux sont des livres de mathématiques et 9 de physique. Le professeur aimerait ranger ses livres de sorte que tous les livres traitant du même sujet restent groupés. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?

EXERCICE10

4 Américains, 3 Suisses et 5 Anglais doivent s'asseoir sur un même banc. Les gens de même nationalité doivent rester ensemble. Combien de dispositions peut-on imaginer?

EXERCICE11

On veut former un comité comprenant 4 des 23 personnes d'un groupe. Combien y a-t-il de ces comités ?

EXERCICE12

1. Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.
On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a, porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré.
Soit (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) un repère orthonormal de l'espace.
On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (a; -5; 1 - a) et (1+b; 1 ;b).

Montrer que la probabilite que ces vecteurs soient orthogonaux est égale à ¼ .

2. Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la première question.

Si A obtient des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, A est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.
Si A obtient des vecteurs non orthogonaux et B des vecteurs orthogonaux, B est déclaré

vainqueur et le jeu s'arrête.
Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie et le jeu continue.

Pour tout entier n, on désigne par :

- A_n l'événement : "A gagne la n-ième partie"
- B_n l'événement : "B gagne la n-ième partie"
- C_n l'événement : "le jeu continue après la n-ième partie"

a. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$, et $p(C_1)$.

b. Exprimer $p(C_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et montrer que : $p(C_n) = \left(\frac{5}{8}\right)^n$
Exprimer $p(A_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et en déduire que :
$$p(A_n) = \frac{3}{16}\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$$

3. *a.* Déterminer la limite de $p(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
b. Déterminer le plus petit entier n tel que $p(A_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01

EXERCICE13(4èA)

Un professeur organise un tournoi de football entre des équipes d'élèves de Seconde et des équipes d'élèves de Première. Voici les résultats des 8 matchs joués le premier jour du tournoi.

	Equipe de Seconde	Equipe de Première
1 er Match	2 buts	1 but
2e Match	2 buts	0 but
3e Match	3 buts	3 buts
4e Match	1 but	3 buts
5e Match	0 but	1 but
6e Match	0 but	0 but
7e Match	1 but	4 buts
8e Match	3 buts	2 buts

On choisit un match au hasard parmi les huit matchs du premier jour du tournoi ; tous les matchs ont la même probabilité d'être choisis.

1. a. Montrer que la probabilité p_1 qu'aucun but n'ait été marqué au cours de ce match est égale à 1/8.

b. Quelle est la probabilité p_2 que le match soit nul (c'est dire que chaque équipe ait marqué le même nombre de buts) ?

2. Pour chaque match, on calcule la différence entre les nombres de buts marqués par les équipes, de façon à trouver un nombre positif ou nul.
On définit ainsi une variable aléatoire X. Par exemple pour le 5e match, la valeur de X est égale à 1 et pour le 8^e match, elle est aussi égale à 1.

a. Donner les valeurs possibles de X.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X

EXERCICE14

Pour passer le temps Chloé et Margaux invente un jeu avec leur paquet de 32 cartes à jouer et un paquet de bonbons.

On rappelle que dans un jeu de 32 cartes on trouves quatre couleurs (pique, coeur , trèfle carreau) et dans chaque couleur , on a une série de 8 cartes (7, 8, 9, 10, valet, dame , roi, as)

Margaux propose la règle suivante :

- On tire une carte et on regarde si c'est un roi. Sans remettre la carte dans le paquet, on tire une seconde carte et on regarde si c'est un roi.
- Si, sur les deux cartes, on a tiré exactement un roi, on gagne 10 bonbons ; si on a tiré deux rois , on gagne 20 bonbons ; sinon on a perdu !

On note :

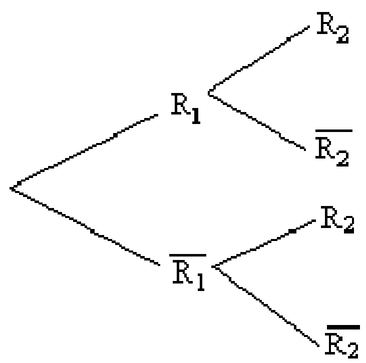
R_1 : l'évènement " tirer un roi au premier tirage " et $\overline{R_1}$ son évènement contraire

R_2 : l'évènement " tirer un roi au deuxième tirage " et $\overline{R_2}$ son évènement contraire

1. Justifier les valeurs des probabilités suivantes :

$$P(R_1) = \frac{1}{8} \quad P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{31} \quad P_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{4}{31}$$

2. On traduit le jeu par un arbre pondéré . Reproduire l'arbre ci-dessous en inscrivant les probabilités en écriture fractionnaire sur chaque branche.



Dans ce qui suit, les probabilités seront données sous forme décimale arrondie au milième

3. Calculer la probabilité des évènements :

A : " tirer un roi au premier et au deuxième tirage "

B : " tirer un roi à un seul des deux tirages "

4. On s'interresse au nombre de bonbons X gagnés après deux tirages.

Recopier et compléter le tableau suivant qui donne la loi de probabilité de X .

Nombre de bonbons x_i	0	10	20
$P(X = x_i)$		0,226	

5. Calculer l'espérance mathématique E de cette loi, arrondie au millième.