SERIE2

EXERCICE 1

A. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.

1° Étudier les variations de g.

2° En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α telle que : $0{,}65 < \alpha < 0{,}66$.

Préciser le signe de $g(x)$

B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(x^2 + x + \dfrac{1}{x}\right)$. On désigne par C sa courbe représentative.

1° Étudier les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

2° Calculer $f'(x)$, vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{3x^2}$. En utilisant la partie A, déterminer le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau des variations de f .

3° Soit I le point de C, d'abscisse -1 et J le point de C, d'abscisse 1. Vérifier que la droite (IJ) est tangente en J à C.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie, pour tout x de $[-2 ; 2]$, par $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$. On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal ; on prendra pour unité graphique 4 cm.

1. Expliquer pourquoi on peut limiter l'étude de f à l'intervalle $[0 ; 2]$.

2. *a*. Étudier la dérivabilité de f en 2 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. *b*. Calculer la dérivée de f sur $[0 ; -2[$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$.

2. *c*. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation sur $[0 ; 2]$.

3. *a*. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.

3. *b*. Montrer que $f(x) - 2x = \dfrac{-x^3}{\sqrt{4 - x^2} + 2}$. En déduire la position de C par rapport à T, sur $[0 ; 2]$.

Rappel : si u est une fonction définie sur l'intervalle I, strictement positive sur I : $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x - \cos x}$ et C sa courbe représentative dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1° *a*. Etudier la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - \cos x$.

Déterminer un encadrement de $g(x)$ pour tout x réel, en déduire la limite de g en $-\infty$ et $+\infty$.

1° *b*. En admettant que g est strictement monotone sur $\mathbb{R}$,démontrer que l'équation $x - \cos x = 0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$.

1° *c*. Préciser le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

1° *d*. Déterminer l'ensemble de définition de f .

2° *a*. Démontrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 2 : $\dfrac{1}{x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x-1}$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

2° *b*. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

3° Déterminer la limite de f quand x tend vers α. (On pourra utiliser la question 1. *c*.)
Démontrer que C admet deux asymptotes que l'on déterminera.

CORRECTION

EXERCICE 1

1° g est un polynôme donc a à l'infini la même limite que son terme de plus haut degré, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗	$-\frac{26}{27}$	↘	-1	↗	$+\infty$

$g\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{26}{27}$

2° Sur $]-\infty ; 0]$, g admet un maximum en $-\frac{1}{3}$ donc pour tout $x \leq 0$, $g(x) \leq g\left(-\frac{1}{3}\right)$ donc $g(x) < 0$

g est continue strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, $g([0 ; +\infty[) = [-1 ; +\infty[$ or $0 \in [-1 ; +\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[0 ; +\infty[$, donc sur $\mathbb{R}$

$g(0{,}65) = -0{,}02825$ et $g(0{,}66) = 0{,}010592$ donc $0{,}65 < \alpha < 0{,}66$.

B. 1° $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + x = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 + x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} x^2 + x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

2° $f'(x) = \frac{1}{3}(2x + 1 - \frac{1}{x^2}) = \frac{2x^3 + x^2 - 1}{3x^2} = \frac{g(x)}{3x^2}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$

En reprenant le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		α		$+\infty$
g	$-\infty$	↗	$-\frac{26}{27}$	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$
$g(x)$		$-$		$-$			0	$+$	

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3° La tangente en J à C est la droite de coefficient directeur $f'(1) = \frac{2}{3}$ et passant par J $(1 ; f(1))$ soit J $(1 ; 1)$ donc la tangente T en J à C a une équation de la forme : $y = \frac{2}{3}x + b$

J $(1 ; 1)$ appartient à la tangente en J à C donc $1 = \frac{2}{3} + b$ donc $b = \frac{1}{3}$.

la tangente en J à C a pour équation $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

Le point I a pour coordonnées $\left(-1 ; -\frac{1}{3}\right)$ or $\frac{2}{3} \times (-1) + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ donc I appartient à la tangente en J à C donc (IJ) est la tangente en J à C.

EXERCICE 2

1. Pour tout x de [– 2 ; 2], – $x \in$ [– 2 ; 2], et $f(-x) = -f(x)$ donc f est impaire. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à O donc on peut limiter l'étude de f à l'intervalle [0 ; 2].

2. *a*. $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{(2+h)\sqrt{h(-4-h)}}{h} = \dfrac{(2+h)\sqrt{h(-4-h)}\sqrt{h(-4-h)}}{h\sqrt{h(-4-h)}} = \dfrac{(2+h)\,h\,(-4-h)}{h\sqrt{h(-4-h)}}$

$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{(2+h)(-4-h)}{\sqrt{h(-4-h)}}$

$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} (2+h)(-4-h) = -8$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \sqrt{h(-4-h)} = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = -\infty$

f n'est pas dérivable en 2 mais la courbe C admet en ce point une tangente verticale.

2. *b*. Soit $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{4-x^2}$ alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

2. *c*. $f'(x)$ a le même signe que $4-2x^2$ soit que $2-x^2$ or $2-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$
donc

x	0		$\sqrt{2}$		2
$2-x^2$		–	0	+	
$f'(x)$		–	0	+	‖
f	0	↗	2	↘	0

3. *a*. La tangente T à C au point d'abscisse 0 est la droite de coefficient directeur $f'(0) = 2$ et qui passe par le point de coordonnées (0 ; 0) donc est la droite d'équation $y = 2x$

3. *b*. $f(x) - 2x = x\sqrt{4-x^2} - 2x = x\left[\sqrt{4-x^2} - 2\right] = x\dfrac{\left[\sqrt{4-x^2}-2\right]\left[\sqrt{4-x^2}+2\right]}{\sqrt{4-x^2}+2} = \dfrac{4-x^2-4}{\sqrt{4-x^2}+2}$

$f(x) - 2x = \dfrac{-x^3}{\sqrt{4-x^2}+2}$, donc pour tout x de [0 ; 2], $f(x) - 2x \leq 0$ donc C est en dessous de T, sur [0 ; 2].

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-\cos x}$ et C sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

1° *a*. g est définie continue dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 1 + \sin x$

$-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $1 + \sin x \geq 0$ donc $g'(x) \geq 0$, donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.

$x - 1 \leq g(x) \leq x + 1$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$ donc d'après les théorèmes de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

$x - 1 \leq g(x) \leq x + 1$ or $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 = -\infty$ donc d'après les théorèmes de comparaison, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

1° *b*. g est définie continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $x - \cos x = 0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$.

1° *c*. g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $g(\alpha) = 0$ donc si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$

1° *d*. $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$,

2° *a*. pour tout réel x supérieur ou égal à 2 : $1 < x - 1 \leq g(x) \leq x + 1$ donc $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{1}{g(x)} \leq \dfrac{1}{x-1}$ et donc $\dfrac{1}{x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2° *b*. pour tout réel x inférieur ou égal à – 2 : $x - 1 \leq g(x) \leq x + 1 \leq - 1$ donc $\dfrac{1}{x-1} \leq \dfrac{1}{g(x)} \leq \dfrac{1}{x+1}$ et donc $\dfrac{1}{x-1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

3° $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à C en $+\infty$ et $-\infty$.

$g(\alpha) = 0$ donc si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$
g est continue en α donc $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} g(x) = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = \alpha$ est asymptote à C.

Guesmi.B