EXERCICE

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) (unité graphique: 1 cm).
Soient A, B et I les points d'affixes respectives 1 + i, 3 – i et 2.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$. Le point M′ est appelé l'image de M.

1. Faire une figure sur une feuille de papier millimétré et compléter cette figure tout au long de l'exercice.

2. Calculer les affixes des points A′ et B′, images respectives des points A et B. Que remarque-t-on ?

3. Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe – 5.

4. *a*. Vérifier que pour tout nombre complexe z , on a :

$$z' + 4 = (z-2)^2 .$$

b. En déduire une relation entre $| z' + 4 |$ et $| z - 2 |$ et, lorsque z est différent de 2, une relation entre arg $(z' + 4)$ et arg $(z - 2)$.

c. Que peut-on dire du point M′ lorsque M décrit le cercle C de centre I et de rayon 2 ?

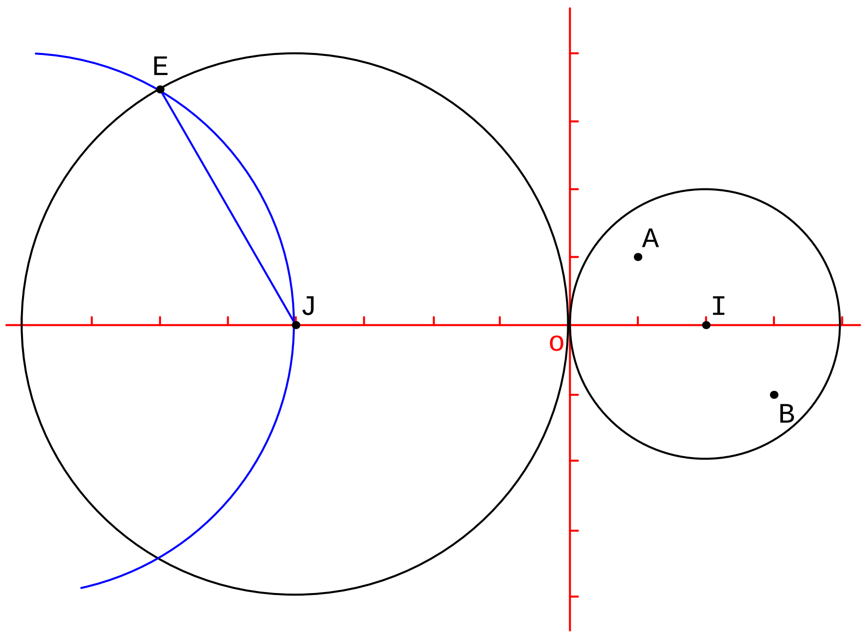
5. Soient E le point d'affixe $2 + 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$, J le point d'affixe – 4 et E′ l'image de E.

a. Calculer la distance IE et une mesure en radians de l'angle $(\vec{u} , \overrightarrow{IE})$.

b. Calculer la distance JE′ et une mesure en radians de l'angle $(\vec{u} , \overrightarrow{JE'})$

c. Construire à la règle et au compas le point E ′ ; on laissera apparents les traits de construction.

CORRECTION



2. $a' = (1 + i)^2 - 4 (1 + i) = 2 i - 4 - 4 i = - 4 - 2 i$
$b' = (3 - i)^2 - 4 (3 - i) = 8 - 6 i - 12 + 4 i = - 4 - 2 i$
$a' = b'$ donc A′ = B′

3. $(z - 2 + i) (z - 2 - i) = (z - 2)^2 - i^2 = z^2 - 4 z + 4 + 1 = z^2 - 4 z + 5$
Il faut résoudre $z^2 - 4 z = - 5 \Leftrightarrow z^2 - 4 z + 5 = 0 \Leftrightarrow (z - 2 + i) (z - 2 - i) = 0$ donc soit $z - 2 + i = 0$ soit $z - 2 - i = 0$
donc $z_1 = 2 + i$ et $z_2 = 2 - i$

4. *a*. $z' + 4 = z^2 - 4 z + 4 = (z - 2)^2$

b. $z' + 4 = (z - 2)^2$ donc $| z' + 4 | = | z - 2 |^2$ et $\arg(z' + 4) = 2 \arg(z - 2) + 2 k \pi$ ($k \in$ Z)

c. Si M décrit le cercle C de centre I et de rayon 2 alors IM = 2 donc $| z - 2 | = 2$ donc $| z' + 4 | = 4$
M′ décrit le cercle de centre J d'affixe – 4 et de rayon 4

5. *a*. $IE = | z - 2 | = | 2\,e^{i\frac{\pi}{3}} | = 2$

$(\vec{u} , \overrightarrow{IE}) = \arg 2\,e^{i\frac{\pi}{3}} + 2 k \pi$ donc une mesure en radians de l'angle $(\vec{u} , \overrightarrow{IE})$ est $\dfrac{\pi}{3}$.

b. E’ est l’image de E par la transformation donc en appliquant que $| z' + 4 | = | z - 2 |^2$ et $\arg(z' + 4) = 2 \arg(z - 2) + 2 k \pi$ ($k \in$ Z)
$JE' = | z' + 4 | = | z - 2 |^2 = 4$

$(\vec{u} , \overrightarrow{JE'}) = \arg(z' + 4) + 2 k \pi$ donc une mesure en radians de l'angle $(\vec{u} , \overrightarrow{JE'})$ est $\dfrac{2\pi}{3}$.

E’ appartient au cercle de centre J de rayon 4 et une mesure en radians de l'angle $(\vec{u} , \overrightarrow{JE'})$ est $\dfrac{2\pi}{3}$ d’où la construction de E’.